EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
OP Praha – pól růstu ČR

Název projektu: Zlepšení inkluze při výuce zahradnictví

Registrační číslo projektu: CZ.07.4.68/0.0/0.0/16_037/0000291
KA01

Předmět: Matematika – číselné obory (1. ročník)

Metodické listy 1 – 10

Zpracoval: Mgr. Karel Pavlík

Obsah

Úvod

Metodika pro výuku vybraných kapitol matematiky byla vytvořena v rámci projektu „Zlepšení inkluze při výuce zahradnictví – klíčová aktivita 01“ a jejím cílem je co nejrychlejší porozumění a snadnější pochopení vybraných částí matematiky pro studenty s odlišným mateřským jazykem (dále jen „OMJ“), především pak studentů ukrajinské a ruské národnosti.

S ohledem na skutečnost, že největší podíl těchto studentů je v 1. ročnících (a to jak maturitních, tak učňovských oborů), z nichž navíc někteří jsou v České republice relativně krátkou dobu, byla do metodiky záměrně vybrána témata na číselné obory a jejich základní vlastnosti. Jedná se o část matematiky, která se podle školních výukových programů (ŠVP) většiny středních odborných škol vyučuje právě hned v 1. pololetí 1. ročníků a která je kromě samotného počítání především o zavedení základní matematické terminologie. Studenti tuto terminologii následně využívají po celou dobu jejich studia a v ideálním případě po celý zbytek svého života.

Jednotlivé metodické listy (ML) jsou koncipovány tak, aby jich primárně využíval pedagog. Současně ale obsahují vždy 2 příklady s celou řadou dílčích úkolů určených pro studenty. Všechny ML mají jednotnou strukturu a témata použitých příkladů byla vybírána vždy tak, aby reflektovala relativně vysoký podíl studentů s OMJ ve třídě. Na konci každého ML je seznam klíčových slov charakteristických pro danou oblast (téma) včetně jejich překladu do ukrajinského jazyka. Překlad klíčových slov proběhl ve spolupráci s paní doktorkou Teťanou Sverdan, za což jí patří velké poděkování.

Vlastní zkušenosti a postřehy s využitím dále popsané metodiky (včetně skupinových a individuálních příkladů) jsou vždy uvedeny v části „Reakce studentů – zpětná vazba“. Kromě svých vlastních postřehů jsou v této části uvedeny i vybrané postřehy studentů získané na základě Dotazníku „Zpětná vazba“ (viz příloha č. 1).

Věřím, že se Vám pomocí této metodiky podaří snáze a rychleji zapojit studenty s OMJ do výuky matematiky na střední škole a studenti s OMJ se budou bez větších problémů orientovat v české terminologii v oblasti matematiky.

Téma 1: Přirozená čísla „N“

Název projektu: Zlepšení inkluze při výuce zahradnictví

Registrační číslo projektu: CZ.07.4.68/0.0/0.0/16_037/0000291
KA01

Téma 1: Číselné obory – přirozená čísla „N“ (matematika, 1. ročník)

Cíl: naučit žáky s odlišným mateřským jazykem (dále jen „OMJ“) schopnosti orientovat se a vyjadřovat se v oblasti přirozených čísel

Úvod

Přirozená čísla vznikla jako zobecnění nenulového počtu skupin osob, zvířat či předmětů. Zformulovat přesnou definici přirozených čísel se podařilo až na přelomu 19. a 20. století italskému matematikovi Giuseppemu Peanovi.

Se základními vlastnostmi a pojmy v oblasti přirozených čísel jsou studenti středních škol seznámeni hned v 1. ročnících a to prostřednictvím jednotlivých dílčích kapitol (viz dále). Znalost základních vlastností přirozených čísel není zvlášť složitá a měla by tak patřit do oblasti „všeobecného přehledu“ každého středoškolského studenta včetně studentů s odlišným mateřským jazykem. Při výuce této oblasti je tak nutné zaměřit se především na sjednocení správného názvosloví a definici základních pojmů jako jsou např. číslo, číslice, ciferný součet, číselná osa, násobek, dělitel, atd.

Dílčí oblasti:

1. Zápis přirozených čísel
    - definice pojmu „přirozené číslo“
    - zápis přirozeného čísla
    - číslo a číslice, ciferný součet, číselná osa
    - desítková soustava

2. Početní operace
    - sčítání, odečítání, násobení, dělení (se zbytkem/beze zbytku)
    - komutativnost sčítání/násobení
    - asociativnost sčítání/násobení
    - distributivnost násobení vzhledem ke sčítání/odečítání

3. Dělitel, násobek
    - dělitelnost, znaky dělitelnosti (2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10)
    - prvočísla, rozklad čísla na součin prvočísel (základní věta aritmetiky)
    - soudělná/nesoudělná čísla
    - společný dělitel, největší společný dělitel
    - společný násobek, nejmenší společný násobek

Příklad 1 – studenti řeší individuálně

S využitím internetu (wikipedie) jsme zjistili následující údaje o rozloze (v km^2) a počtu obyvatel žijících v České republice, na Ukrajině a v Rusku:

Stát / hodnoty	Rozloha (km^2)	Počet obyvatel
Česká republika („ČR“)	78 866	10 553 843
Ukrajina	603 700	45 539 121
Rusko	17 075 200	142 423 773

S využitím znalostí a vlastnostech přirozených čísel řešte individuálně následující úkoly:

Úkoly/otázky
1. Kolikaciferné číslo vyjadřuje hodnotu rozlohy Ukrajiny?
2. Jaké číslice obsahuje číslo vyjadřující počet obyvatel žijících v Rusku?
3. Jaký údaj je vyjádřen šesticiferným číslem?
4. Zapište pomocí římských číslic číslo vyjadřující hodnotu počtu obyvatel žijících v ČR na ploše 1 km^2 (cca 134 obyvatel).
5. Zapište číslo vyjadřující rozlohu ČR pomocí desítkové soustavy (dekadický zápis).
6. Seřaďte státy podle velikosti (rozloha) od nejmenšího k největšímu.
7. Jaký je rozdíl v počtu obyvatel žijících v Rusku a na Ukrajině
8. Kolik obyvatel žije ve všech třech státech dohromady?
9. O kolik obyvatel více žije v Rusku než v České republice?
10. Jaký je ciferný součet čísla vyjadřující počet obyvatel žijících na Ukrajině?
11. Které z čísel uvedených v tabulce má největší číselný součet?
12. Určete, zda číslo vyjadřující počet obyvatel žijících na Ukrajině je dělitelné čísly 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 nebo 10.
13. Rozložte číslo vyjadřující rozlohu Ruska na součin prvočísel.
14. Vyberte z tabulky alespoň jednu dvojici čísel, která jsou soudělná.

Řešení, výsledky

1. Číslo 603 700 tvoří 6 číslic (cifer), tzn. jedná se šesticiferné číslo.
2. Číslo 142 423 773 napíšeme pomocí číslic 1, 2, 3, 4 a 7.
3. Jako šesticiferné číslo (číslo tvořené šesti číslicemi) je vyjádřena hodnota rozlohy Ukrajiny – číslo 603 700.
4. Číslo 134 – římský zápis: CXXXIV.
5. Číslo 78 866 – dekadický zápis: 78 866 = 7*10 000 + 8*1 000 + 8*100 + 6*10 + 6*1, resp. 78 866 = $7*10^4 + 8*10^3 + 8*10^2 + 6*10^1 + 6*10^0$.
6. Porovnání čísel – provádíme pomocí číselné osy, přičemž platí, že větší číslo má na číselné ose obraz vždy více napravo. Tzn. nejmenší rozlohu má ČR (78 866) a největší Rusko (17 075 200).
7. Odečítání 2 přirozených čísel: 17 075 200 – 603 700 = 16 471 500.
8. Sčítání 3 přirozených čísel: 10 553 843 + 45 539 121 + 142 423 773 = 198 516 737.
9. Odečítání 2 přirozených čísel: 142 423 773 - 10 553 843 = 131 869 930.
10. Číslo 45 539 121 – ciferný součet: 4+5+5+3+9+1+2+1 = 30
11. Rozloha: ČR – 35, Ukrajina - 16, Rusko – 22; počet obyvatel: ČR – 29, Ukrajina - 30, Rusko – 33.
12. Číslo 45 539 121 (ciferný součet je 30) – znaky dělitelnosti: číslem 2 – ANO (sudé číslo), 3 – ANO (ciferný součet je dělitelný číslem 3), 4 – NE (poslední dvojčíslí není dělitelné 4), 5 NE (poslední číslice není 0 nebo 5), 6 – ANO (číslo je dělitelné 2 a současně i 3), 8 – NE (poslední trojčíslí není dělitelné 8), 9 – NE (ciferný součet není dělitelný číslem 9), 10 – NE (poslední číslice není 0)
13. Číslo 17 075 200 – rozklad na součin prvočísel (metoda „kříže“): 17 075 200 = 2*2*2*2*2*2*2*2*2*2*5*5*23*29 = $2^{10}*5^2*23*29$
14. Soudělná čísla – čísla mající alespoň jednoho společné ho dělitele různého od jedné, tzn. soudělná jsou např. všechna sudá čísla, tzn.: 78 866, 603 700 nebo 603 700, 17 075 200 apod.

Příklad 2 – skupinová práce (studenti řeší ve dvojici v rámci celé třídy)

První student z dvojice („zadavatel“) je vyzván k tomu, aby si myslel jakékoliv pěticiferné číslo a zapsal ho na lístek papíru tak, aby ho druhý ze studentů („řešitel“) neviděl. Dále je zadavatel vyzván, aby si poznamenal základní vlastnosti daného čísla (číselný součet, dělitelnost, rozklad na součin prvočísel, apod.)

Úkol

Řešitel je následně vyzván, aby pomocí co nejmenšího počtu zjišťovacích otázek (odpověď ano/ne) zjistil, jaké číslo „zadavatel“ napsal na lístek papíru.

Řešitelé mají celkem 3 pokusy ke správnému uhodnutí čísla. Při nesprávném tipu se řešiteli přičte 5 „trestných otázek“, přičemž nejlepším řešitelem se stává ten, kdo dané číslo určí s pomocí co nejmenšího počtu položených zjišťovacích otázek.

Následně si studenti role vymění tak, aby si roli řešitelů postupně vyzkoušeli všichni studenti. Alternativní variantou může být i realizace této úlohy tak, že dané číslo „si myslí“ učitel a otázky pokládají celé skupiny studentů, např. jednotlivé řady lavic.

Řešení

Studenti hodnotu daného čísla zjišťují pomocí vhodných matematických otázek z oblasti základních charakteristik přirozených čísel:

- otázky na číslice v daném čísle
- otázky na ciferný součet
- otázky na dělitelnost
- apod.

Reakce studentů (zpětná vazba)

příklad 1 (individuální)

Studenti s OMJ mají problém s pochopením rozdílu „číslo x číslice“. Problém nedělají úkoly na porovnávání čísel a příklady na součet, rozdíl, součin a podíl. Horší je to se znaky dělitelnosti (hlavně v případě čísel 6, 8 a 9) a s rozkladem čísel na součin prvočísel

příklad 2 (skupinová práce)

Varianta hledání daného čísla v rámci dvojic funguje pouze u matematicky zdatnějších studentů. Jako lepší se tak ukazuje varianta, kdy je zadavatel přímo učitel a dané číslo/čísla „hádají“ studenti

Závěr

Výše uvedené příklady je vhodné použít jako opakování před testem ke kapitole „přirozená čísla **N**“. Zvolená forma zohledňuje přítomnost českých, ukrajinských i ruských studentů ve třídě a eliminuje pocit diskriminace jedné skupiny studentů vůči skupinám zbylým. Současně zvolená forma umožňuje seznámení se s faktickými informacemi týkající se tří konkrétních států a jejich vzájemné porovnání. V upravené podobě lze podobným způsobem ověřit znalost dílčích témat oblasti přirozených čísel („**N**“) i v 1. ročníku učebního oboru.

Klíčová slova, slovník

číslo - число [čysl**o**]
číslice - цифра [c**y**fra]
sudé číslo - парне число [p**a**rne čysl**o**]
liché číslo - непарне число [nep**a**rne čysl**o**]
prvočíslo - просте число [prost**e** čysl**o**]
násobek - кратне [kr**a**tne]
dělitel - дільник [ďiľn**y**k]
sčítání - додавання [dodav**a**ňňa]
součet - сума [s**u**ma]
odečítání - віднімання [vidňim**a**ňňa]
rozdíl - різниця [r'izn**y**c'a]
násobení - множення [mn**o**žeňňa]
součin - добуток [dob**u**tok]
dělení - ділення [ď**i**leňňa]
podíl - частка [č**a**stka]

Téma 2: Celá čísla „Z“

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
OP Praha – pól růstu ČR

Název projektu: Zlepšení inkluze při výuce zahradnictví

Registrační číslo projektu: CZ.07.4.68/0.0/0.0/16_037/0000291
KA01

Téma 2: Číselné obory – celá čísla „Z“ (matematika, 1. ročník)

Cíl: naučit žáky s OMJ schopnosti orientovat se a vyjadřovat se v oblasti celých čísel

Úvod

Množinu všech celých čísel dostaneme postupným rozšířením množiny přirozených čísel. Prvním rozšířením množiny přirozených čísel je rozšíření o číslo 0 (nula), druhým rozšířením je pak rozšíření o všechna čísla opačná k množině všech přirozených čísel.

Pravidla pro počítání s nulou a zápornými čísly zavedl indický matematik Brahmagupta (598-668). Záporná čísla v nich nazývá „dluh“ a kladná „zisk“ a zmíněná pravidla tak zněla: Dluh zmenšený o nulu je zase dluh, zisk zmenšený o nulu je zisk, nula zmenšená o nulu je zase nula.

Dílčí oblasti:

1. Definice pojmu „celé číslo“
    - definice pojmu „nezáporné číslo“ („**N**“ a „**0**“)
    - definice pojmu „opačné číslo“ („**N**“ x „**-N**“)
    - celá čísla („**Z**“) = přirozeného čísla („**N**“), **0**, čísla k přiroz. číslům opačná („**-N**“)
    - číselná osa, porovnání kladných a záporných čísel a nuly (porovnání celých čísel)
    - kladná / záporná / nekladná / nezáporná celá čísla
2. Početní operace
    - sčítání, odečítání, násobení, dělení (spec. případy: násobení/dělení čísly „0“ a „1“)
    - komutativnost sčítání/násobení

- asociativnost sčítání/násobení
- distributivnost násobení vzhledem ke sčítání

Příklad 1 – studenti řeší individuálně

V následující tabulce jsou uvedeny hodnoty teploty vzduchu, které byly naměřeny v Praze v Hloubětíně v roce 2017 v prvním prosincovém týdnu ráno v 7:00 hodin.

Den	pondělí	úterý	středa	čtvrtek	pátek	sobota	neděle
Teplota ve °C	-8	-2	0	-4	-1	4	11

S využitím znalostí vlastností a pravidel pro počítání celých čísel řešte individuálně následující úkoly:

Úkoly/otázky
1. Který den byla naměřena nejvyšší teplota?
2. Který den byla naměřena nejnižší teplota?
3. Jaký je rozdíl mezi nejvyšší a nejnižší naměřenou teplotou?
4. Mezi kterými sousedními dny byl teplotní rozdíl nejnižší?
5. Mezi kterými sousedními dny byl teplotní rozdíl nejvyšší?
6. Jaký teplotní rozdíl byl mezi dny úterý a sobota?
7. V jaké dny byly naměřeny nezáporné teploty?
8. V jaké dny byly naměřeny nekladné teploty?
9. Na číselné ose znázorněte teploty naměřené v úterý, ve středu, ve čtvrtek, v pátek a v sobotu?
10. Určete počet celých čísel, která jsou větší než nejmenší naměřená teplota a menší než největší naměřená teplota.
11. Najděte dvojici teplot, která představují navzájem opačná celá čísla.
12. Jaké číslo je číslo opačné k hodnotě teploty naměřené v úterý.

Řešení, výsledky
1. Neděle (11 °C)
2. Pondělí (-8 °C)
3. 19 °C (11 – (-8) = 11 + 8 = 19)
4. PO-ÚT: 6 °C, **ÚT-ST: 2 °C**, ST-ČT: 4 °C, ČT-PÁ: 3 °C, PÁ-SO: 5 °C, SO-NE: 7 °C
5. PO-ÚT: 6 °C, ÚT-ST: 2 °C, ST-ČT: 4 °C, ČT-PÁ: 3 °C, PÁ-SO: 5 °C, **SO-NE: 7 °C**
6. ÚT-SO: 6 °C (4 – (-2) = 4 + 2 = 6)
7. „nezáporné“ = „kladné“ a „nula“, tzn.: středa, sobota, neděle
8. „nekladné“ = „záporné“ a „nula“, tzn.: pondělí, úterý, středa, čtvrtek, pátek
9. -4 -2 -1 0 4

10. Danou podmínku splňují teploty -4 °C (ČT), -2 °C (ÚT), -1 °C (PÁ), 0 °C (ST) a 4 °C (SO), tzn. celkem 5 celých čísel.
11. Jedná se o teploty ve čtvrtek (-4 °C) a v sobotu (4 °C), tzn. navzájem opačná čísla jsou -4 a 4.
12. Hodnota úterní teploty je -2, tzn. číslo opačné k hodnotě úterní teploty je 2.

Příklad 2 – skupinová práce (studenti řeší ve skupině)

Učitel rozdělí třídu na 3 až 5 skupin (podle počtu studentů ve třídě) a následně postupně zadává příklady (otázky) z oblasti počítání s celými čísly. Podle náročnosti nechá vždy přiměřený čas (15 s až 20 s) na zaznamenání odpovědi. Otázku přečteme minimálně 2-krát, v případě těch složitějších klidně i 3-krát. Následně vybere záznamy odpovědí a vyhodnotí úspěšnost řešení v jednotlivých skupinách a určí výsledné pořadí.

Úkoly (příklady/otázky)
1. Uveďte příklad dvou celých čísel, z nichž jedno je kladné, jedno záporné a vzdálenost jejich obrazů na číselné ose je 7 jednotek.
2. Uveďte příklad tří čísel, jejichž součet se rovná nule, alespoň jedno z nich je kladné a alespoň jedno z nich je záporné.
3. Uveďte příklad dvou celých čísel, z nichž jedno je trojciferné, druhé je dvojciferné a jejich podíl je celé záporné číslo.
4. Rozhodněte, zda je pravdivé tvrzení, že „součin lichého počtu záporných čísel je kladný“.
5. Rozhodněte, zda je pravdivé tvrzení, že „rozdíl libovolných dvou záporných čísel je kladný“.
6. Rozhodněte, zda je pravdivé tvrzení, že „podíl libovolných dvou celých čísel různých od nuly je také celé číslo“.
7. Určete součin součtu a rozdílu čísel -34 a -6.
8. Určete podíl rozdílu čísel a součtu čísel -15 a 5.

Řešení:
1. Existuje více možností, např. -3 a 4, -2 a 5 apod.
2. Opět existuje více možností, např. -5, 0, 5 nebo -5, 2, 3 apod.
3. Například 110 a -10 (podíl je -11, čili záporné číslo). Možností existuje opět spousty.
4. Tvrzení není pravdivé, správně má být že součin je záporný.
5. Tvrzení není pravdivé, např. v případě čísel -10 a -5 je jejich rozdíl -5 (-10 – (-5) = -5), tzn. záporné číslo.
6. Tvrzení není pravdivé, neplatí například pro celá čísla 3 a 5, jejichž podíl je zlomek 3/5, což není celé číslo.
7. Výsledek: (-34 + (-6)) x (-34 – (-6)) = -40 x 28 = -1120
8. Výsledek: (-15 – 5) : (-15 + 5) = -20 : (-10) = 2

Reakce studentů (zpětná vazba)

příklad 1 (individuální)

Studenti s OMJ zvládají úkoly/otázky, které jsou jednoduché a jsou zformulované jednoduchou češtinou. Problém představují úkoly/otázky se složitější terminologií. Největší problém představoval úkol č. 10, a to jak studentům s OMJ, tak i studentům s českým mateřským jazykem.

příklad 2 (skupinová práce)

Studentům s OMJ dělá problém orientovat se v terminologii „nekladná čísla“ a „nezáporná čísla“ (terminologie kladná, resp. záporná čísla žádný zásadní problém nepředstavuje). Početní operace s celými čísly zvládají studenti s OMJ bez větších problémů, to samé platí i pro oblast porovnávání celých čísel.

Závěr

Výše uvedené příklady je vhodné použít jako opakování před testem ke kapitole „celá čísla **Z**“. Zadání příkladu je záměrně zvoleno z „neutrální“ oblasti porovnávání hodnot naměřených teplot a lze tak docílit poměrně vysokého zájmu o řešení dané problematiky u všech studentů, tzn. i u těch s OMJ. V upravené podobě lze podobným způsobem ověřit znalost dílčích témat oblasti celých čísel („**Z**“) i v 1. ročníku učebního oboru.

Klíčová slova, slovník

číslo opačné - протилежне число [protyl**e**žne čysl**o**]
číselná osa - числова вісь [čyslov**a** vis’]
větší číslo - більше число [b**i**l’še čysl**o**]
menší číslo - менше число [m**e**nše čysl**o**]
kladné číslo - додатне число [dod**a**tne čysl**o**]
záporné číslo - від’ємне число [vidj**e**mne čysl**o**]
nekladné číslo - недодатне число [nedod**a**tne čysl**o**]
nezáporné číslo - невід’ємне число [nevidj**e**mne čysl**o**]

Téma 3: Racionální čísla „Q“ - desetinná čísla, převody jednotek

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
OP Praha – pól růstu ČR

PRAHA
PRAGUE
PRAGA
PRAG

Název projektu: Zlepšení inkluze při výuce zahradnictví

Registrační číslo projektu: CZ.07.4.68/0.0/0.0/16_037/0000291
KA01

Téma 3: Číselné obory – racionální čísla „Q", část 1: desetinná čísla, převody jednotek (matematika, 1. ročník)

Cíl: naučit žáky s OMJ schopnosti orientovat se a vyjadřovat se v oblasti racionálních čísel, konkrétně v oblasti desetinných čísel

Úvod

Jelikož přirozená („**N**") ani celá („**Z**") čísla zdaleka nestačí každodenní potřebě, je potřeba definovat ještě širší číselný obor, který bude množinou čísel vyjadřujících díly celých čísel.

Ačkoli jistou podobu desetinných zlomků používali matematikové již před naším letopočtem, desetinná čísla jsou relativně novým objevem. S rozvojem průmyslu a techniky v 16. a v 17. století vznikla potřeba složitých výpočtů a díky svým přednostem při výpočtech se stala desetinná čísla nedílnou součástí matematiky.

Dílčí oblasti:

1. Definice pojmu „racionální číslo"
   - díl celého čísla (**„Z"/„N"**)
   - zápis 1: zlomek v základním tvaru
   - zápis 2: a) dekadický zápis s ukončeným des. rozvojem
     b) dekadický zápis s neukončeným, ale periodickým des. rozvojem
   - desetinné číslo (celá/necelá část, desetinná čárka)

2. Desetinné číslo
    - celá/necelá část, desetinná čárka
    - řád číslice, řád čísla
    - zaokrouhlování desetinných čísel
    - porovnání desetinných čísel
    - početní operace s desetinnými čísly (sčítání, odečítání, násobení, dělení)
    - periodické číslo

3. Převody jednotek
    - jednotky délky, obsahu, objemu
    - jednotky času
    - jednotky hmotnosti

Příklad 1 – studenti řeší individuálně

V následující tabulce jsou uvedeny výsledky vybraných sportovních disciplín 5 studentů z 1.A dosažených v rámci výuky tělesné výchovy.

Student/studentka 1.A	Běh 100 m	Skok do dálky	Běh 1 500 m	Skok do výšky	Hod koulí
Jan (ČR)	13,6 s	3,20 m	5 min 36 s	1,15 m	8,30 m
Anastazie (RUS)	14,8 s	2,45 m	7 min 24 s	0,98 m	5,25 m
Yurii (UKR)	12,9 s	3,40 m	4 min 54 s	1,23 m	7,55 m
Adéla (ČR)	15,5 s	2,35 m	6 min 54 s	1,01 m	4,80 m
Tamara (UKR)	15,2 s	2,15 m	7 min 30 s	0,89 m	4,35 m

S využitím znalostí vlastností a pravidel pro počítání desetinných čísel řešte individuálně následující úkoly:

Úkoly/otázky

1. Určete pořadí v jednotlivých disciplínách v případě studentky Anastazie (Nasťa).
2. Jaká je celkový čas všech 5 studentů v případě disciplíny „Běh na 1500 m“? Výsledný čas vyjádřete v sekundách, minutách a hodinách.
3. Jaká je celková délka všech hodů koulí všech 5 studentů. Výslednou délku vyjádřete v metrech a následně ještě i v km, dm, cm a mm.
4. Jaký je rozdíl mezi nejdelším a nejkratším skokem do dálky. Výsledek vyjádřete v metrech i centimetrech.
5. Jaký je rozdíl mezi nejlepším a nejhorším časem v běhu na 100 m? Výsledek uveďte v sekundách.
6. Jaká číslice je na řádu desetin u hodnoty skoku do dálky v případě studentky Tamary?

7. Jakého řádu je číslo vyjadřující v sekundách hodnotu času běhu na 100 m v případě studenta Jana?
8. Jakého řádu je číslo vyjadřující v metrech hodnotu skoku do výšky v případě studentky Anastazie?
9. Zaokrouhlete časy běhu na 100 m u všech 5 studentů na jednotky sekund.
10. Převeďte hodnoty skoků do dálky u všech 5 studentů na centimetry a následně je zaokrouhlete na desítky centimetrů.
11. Hodnotu délky hodu koulí v případě Tamary (4,35) zapište pomocí rozvinutého zápisu desetinných čísel.
12. Je některé z čísel uvedených v tabulce periodické? Pokud ne, o kolik vteřin by musel Jan běžet 1 500 m pomaleji, aby jeho výsledný čas vyjádřený v minutách představoval periodické číslo?

Řešení, výsledky

1. Anastazie: běh na 100 m – **3.**, skok do dálky – **3.**, běh na 1 500 m – **4.**, skok do výšky – **4.**, hod koulí – **3.**
2. 32 minut 18 s = 1 938 s = 32,3 minut = 0,538333333… hodin
3. 30,25 m = 302,5 dm = 3 025 cm = 30 250 mm = 0,03025 km
4. 3,40 m – 2,15 m = 1,25 m = 125 cm
5. 15,5 s – 12,9 s = 2,6 s
6. 2,$\underline{1}$5 m – na řádu desetin je číslice „1“
7. $\underline{1}$3,6 s – číslo řádu desítek
8. 0,$\underline{9}$8 m – číslo řádu desetin
9. Jan - 14 s, Anastazie – 15 s, Yurii – 13 s, Adéla – 16 s, Tamara – 15 s
10. 13,55 m = 1 355 cm, po zaokrouhlení na desítky centimetrů: 1 360 cm
11. 4,35 = 4*1 + 3*0,1 + 5*0,01
12. o 4 sekundy, tzn. výsledný čas by byl 5 min 40 s, tzn. 5,6 periodických minut

Příklad 2 – skupinová práce (studenti řeší ve skupině)

Učitel rozdělí třídu na 3 až 5 skupin (podle počtu studentů ve třídě) a následně vyzve všechny skupiny studentů k navržení způsobu stanovení celkového „spravedlivého“ vyhodnocení pořadí všech 5 studentů ve všech 5 disciplínách. Následně porovná pořadí studentů podle jednotlivými skupinami navrženými způsoby celkového hodnocení a v případě výskytu rozdílů vysvětlí jejich příčinu a vhodnost/nevhodnost jednotlivých „metodik“.

Možná řešení:

1. sečíst čísla vyjadřující pořadí daného studenta v jednotlivých disciplínách a výsledné pořadí stanovit podle hodnoty celkového součtu (vítěz bude student s nejmenším součtem, nejhorší bude student s nejvyšší hodnotou součtu)
2. pořadí v jednotlivých disciplínách „ocenit“ příslušnou bodovou škálou (např. 1. místo 5 bodů, 5. místo 1 bod), následně spočítat celkový počet bodů získaných jednotlivými

studenty za všechny disciplíny a výsledné pořadí určit podle celkového počtu získaných bodů (největší počet bodů – 1. místo, nejmenší počet bodů – 5. místo)

3. pro všech 5 studentů spočítat aritmetický průměr čísel vyjadřující jejich pořadí v jednotlivých disciplínách a výsledné pořadí určit podle hodnot těchto aritmetických průměrů (nejmenší hodnota průměru – 1. místo, největší hodnota průměru – 5. místo)

Toto jsou jen 3 ukázky možných způsobů vyhodnocení celkového pořadí. Další způsoby jsou možné.

Reakce studentů (zpětná vazba)

příklad 1 (individuální)

Z početních operací s desetinnými čísly způsobuje komplikace pouze dělení, při kterém nemalá část studentů chybuje ve způsobu stanovení výsledného počtu desetinných míst (týká se všech studentů, tj. nejenom těch s OMJ). Studenti s OMJ dále příliš nechápou rozdíl mezi „řádem čísla" a „řádem číslice". Naopak celkem bez větších problémů zvládají zaokrouhlování a problematiku periodických čísel. U převodů činní problémy hmotnostní jednotky 1 tuna a 1 metrický cent, u objemových jednotek studenti příliš neznají 1 hl (hektolitr), překvapivě studenti neznají ani základní převod 1 l = 1 dm^3. Problémy studentům činí i plošné jednotky 1 ar (a) a 1 hektar (ha).

příklad 2 (skupinová práce)

Studenti řeší zadaný úkol spíše „pocitově" (intuitivně) a nejsou schopni matematicky popsat způsob, pomocí kterého výsledné pořadí určili. I když výsledné pořadí většina skupin určila správně. Jazyková bariéra u tohoto typu příkladu není u studentů s OMJ žádnou zásadnější překážkou a naopak jejich vyšší věk a matematická zdatnost způsobila, že ve většině skupin studenti s OMJ byli těmi, kdo „určovali směr".

Závěr

Výše uvedené příklady je vhodné použít jako opakování před testem ke kapitole „racionální čísla **Q** – desetinná čísla, převody jednotek". S ohledem na studijní obor „zahradnictví" je třeba důkladně se studenty probrat převody jednotek, a to hlavně těch plošných, objemových i hmotnostních.

Klíčová slova, slovník

desetinné číslo - десятковий дріб [des'atk**o**vyj dr'ib]
periodické číslo - періодичний дріб [per'iod**y**čnyj dr'ib]
řád čísla - розряд числа [rozr'**a**d čysl**a**]
řád číslice - вага цифри [vah**a** c**y**fry]
desetinná čárka - десяткова кома [des'atk**o**va k**o**ma]
zaokrouhlení - округлення/заокруглення [zaokr**u**hleňňa]

Téma 4: Racionální čísla „Q“ - zlomky

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
OP Praha – pól růstu ČR

PRAHA PRAGUE PRAGA PRAG

Název projektu: Zlepšení inkluze při výuce zahradnictví

Registrační číslo projektu: CZ.07.4.68/0.0/0.0/16_037/0000291
KA01

Téma 4: Číselné obory – racionální čísla „Q“, část 2: zlomky (matematika, 1. ročník)

Cíl: naučit žáky s OMJ schopnosti orientovat se a vyjadřovat se v oblasti racionálních čísel, konkrétně v oblasti zlomků

Úvod

Už od starověku lidé řešili problémy, které se týkaly rozdělování majetku nebo zboží. Vyjádřit takové rozdělení jen pomocí přirozených čísel nebylo vždy možné. Hledal se tak způsob, jak zapsat část celku, a našel se. Šlo o zlomek. Zlomkem tak dnes zapisujeme, na kolik částí je celek rozdělen a kolik těchto částí uvažujeme.

Dílčí oblasti:

1. Definice pojmu „zlomek“, „smíšené číslo“
    - čitatel, jmenovatel
    - základní podmínka existence zlomku (jmenovatel různý od nuly)
    - hodnota zlomku (a/b = a:b)
    - převrácený zlomek
    - opačný zlomek
    - pravý/nepravý zlomek
    - smíšené číslo, převod zlomku na smíšené číslo a naopak
    - zobrazení zlomku na číselné ose

2. Úprava a porovnání zlomků
    - rozšiřování/krácení zlomků
    - základní tvar zlomku
    - úprava zlomků na společného jmenovatele
    - porovnávání zlomků (převod na des. číslo x převod na společného jmenovatele x „křížové pravidlo“)

3. Početní operace se zlomky
    - násobení zlomků
    - dělení zlomků
    - sčítání a odčítání zlomků se stejnými/různými jmenovateli
    - složený zlomek

Příklad 1 – studenti řeší individuálně

V následující tabulce jsou pomocí zlomků, smíšených čísel a desetinných čísel vyjádřeny, jak velkou část dne museli studenti Lukáš (ČR), Svetlana (RUS) a Yurii (UKR) vynaložit na jednotlivé činnosti uvedené v tabulce (viz níže).

Student/studentka 1.A	Domácí úkol z matematiky	Lyžařský výcvik	Povinná četba (včetně zápisu do čtenářského deníku)
Lukáš (ČR)	1/24	$6\,^{1}/_{4}$	$2\,^{1}/_{8}$
Svetlana (RUS)	2/52	6,25	100/33
Yurii (UKR)	0,042	$4\,^{3}/_{5}$	2,45

S využitím znalostí vlastností a pravidel pro počítání se zlomky řešte individuálně následující úkoly:

Úkoly/otázky

1. Uveďte hodnotu čitatele a jmenovatele u zlomku vyjadřující dobu, po kterou psal Lukáš domácí úkol z matematiky.
2. Jaký je opačný a převrácený zlomek ke zlomku vyjadřující dobu, po kterou Svetlana četla knihu do povinné četby (včetně zápisu do čt. deníku).
3. Je v tabulce nějaký údaj vyjádřen pomocí nepravého zlomku? Pokud ano, který?
4. Vyjádřete dobu, po kterou se Yurii zúčastnil lyžařského výcviku pomocí zlomku a jako desetinné číslo.
5. Vyjádřete dobu, po kterou Svetlana četla knihu do povinné četby (včetně zápisu do čt. deníku) jako smíšené číslo.
6. Který ze zlomků uvedených v tabulce není vyjádřen v základním tvaru?

7. Porovnejte doby trvání psaní domácího úkolu z matematiky a seřaďte je od nejkratší k nejdelší.
8. Jsou v tabulce uvedeny dvě hodnoty, které vyjadřují stejné časové úseky. Pokud ano, které?
9. Kolik dní celkem strávili na lyžařském výcviku všichni 3 studenti dohromady? Výsledek vyjádřete jako zlomek, smíšené číslo i pomocí desetinného čísla.
10. O kolik dní byl Lukáš na lyžařském výcviku déle než Yurii? Výsledek vyjádřete jako zlomek, smíšené číslo i pomocí desetinného čísla.
11. Jaký je součin hodnot vyjadřujících doby, po které se lyžařského výcviku zúčastnili Lukáš a Yurii? Výsledek opět vyjádřete jako zlomek, smíšené číslo a pomocí desetinného čísla.
12. Pomocí složeného zlomku vyjádřete podíl zlomků vyjadřující doby, po které vypracovávali domácí úkol z matematiky Lukáš a Svetlana a hodnotu tohoto podílu vyjádřete pomocí zlomku v základním tvaru.

Řešení, výsledky

1. Jedná se o zlomek 1/24, tzn. čitatel je **1** a jmenovatel je **24**.
2. Jedná se o zlomek 100/33, tzn. opačný zlomek je **–100/33** a převrácený zlomek je **33/100**.
3. Ano, je. Jedná se o zlomek 100/33, ve kterém je čitatel větší než jmenovatel (= definice nepravého zlomku).
4. Platí: $4\,^{3}/_{5}$ = 23/5 = 4,6 .
5. Platí: 100/33 = $3\,^{1}/_{3}$.
6. Jedná se o zlomek 2/52 , který lze krátit číslem 2 a teprve potom dostaneme zlomek v základním tvaru 1/26 .
7. Porovnání lze provést například převodem všech třech hodnot na desetinná čísla: 1/24 = 0,0416666 , 2/52 = 1/26 = 0,0384615 (nejkratší) , 0,042 (nejdelší)
   Pozn: porovnání lze provést i jinými metodami (přes společného jmenovatele nebo s využitím „křížového pravidla“).
8. Ano, jsou: $6\,^{1}/_{4}$ = 6,25 .
9. Platí: $6\,^{1}/_{4}$ + 6,25 + $4\,^{3}/_{5}$ = 25/4 + 25/4 + 23/5 = (125+125+92)/20 = 342/20 =
   = **171/10 = 17 $^{1}/_{10}$ = 17,1 dní** .
10. Platí: $6\,^{1}/_{4}$ - $4\,^{3}/_{5}$ = 25/4 – 23/5 = (125-92)/20 = **33/20 = 1 $^{13}/_{20}$ = 1,65 dní .**
11. Platí: $6\,^{1}/_{4}$ * $4\,^{3}/_{5}$ = 25/4 * 23/5 = 5/4 * 23 = **115/4 = 23 $^{3}/_{4}$ = 23,75 dní .**
12. Platí: (1/24) / (2/52) = (1/24) : (2/52) = 1/24 * 52/2 = 1/24 * 26 = **13/12 = 1 $^{1}/_{12}$ = 1,083 .**

Příklad 2 – skupinová práce (studenti řeší ve skupině)

Učitel rozdělí třídu na 3 skupiny (např. po jednotlivých řadách) a následně všem 3 skupinám popíše výchozí situaci (základní údaje píše na tabuli) a následně zadá úkoly k řešení (opět je vhodné psát jednotlivé úkoly na tabuli).

Popis výchozí situace:

3 skupiny studentů třídy 1.A jsou ve Vizovicích na brigádě na sběru švestek. První skupině přitom velí Lukáš (skupina „Lukáš“), druhé skupině Svetlana (skupina „Svetlana“) a třetí Yurii (skupina „Yurii“). Studenti sbírají švestky do 12 litrových kbelíků a za první dva dny posbírají následující množství švestek.

Brigáda - švestky (1.A)	počet nasbíraných kbelíků 1. den	počet nasbíraných kbelíků 2. den
skupina „Lukáš“	180	160
skupina „Svetlana“	120	200
skupina „Yurii“	180	180

Úkoly/otázky

1. Pomocí zlomku vyjádřete, jak velkou část z celkového počtu nasbíraných švestek (za oba 2 dny) nasbíraly všechny 3 skupiny dohromady za 1. den a jak velkou část za 2. den.
2. Pomocí zlomku vyjádřete, jak velkou část z celkového počtu nasbíraných švestek (za oba 2 dny) nasbíraly jednotlivé skupiny.
3. Dále pomocí zlomků vyjádřete následující podíly:
   a) Podíl jednotlivých skupin na celkovém počtu nasbíraných švestek za 1. den.
   b) Podíl jednotlivých skupin na celkovém počtu nasbíraných švestek za 2. den.

Řešení:

1.

Brigáda - švestky (1.A)	počet nasb. kbelíků 1. den	počet nasb. kbelíků 2. den	počet nasb. kbelíků 1. i 2. den
skupina „Lukáš“	180	160	340
skupina „Svetlana“	120	200	320
skupina „Yurii“	180	180	360
Celkem	480 **(8/17)**	540 **(9/17)**	1 020 **(1)**

2.

Brigáda - švestky (1.A)	počet nasb. kbelíků 1. den	počet nasb. kbelíků 2. den	počet nasb. kbelíků 1. i 2. den
skupina „Lukáš“	180	160	340 **(17/51)**
skupina „Svetlana“	120	200	320 **(16/51)**
skupina „Yurii“	180	180	360 **(18/51)**
Celkem	480	540	1 020 **(1)**

3. a), b)

Brigáda - švestky (1.A)	počet nasb. kbelíků 1. den	počet nasb. kbelíků 2. den	počet nasb. kbelíků 1. i 2. den
skupina „Lukáš“	180 **(3/8)**	160 **(8/27)**	340
skupina „Svetlana“	120 **(1/4)**	200 **(10/27)**	320
skupina „Yurii“	180 **(3/8)**	180 **(1/3)**	360
Celkem	480 **(1)**	540 **(1)**	1 020

Reakce studentů (zpětná vazba)

příklad 1 (individuální)

Většina studentů s OMJ zvládá počítání se zlomky bez větších problémů, k jistým nedorozuměním dochází pouze z důvodu neznalosti české terminologie v oblasti zlomků (pravý/nepravý zlomek, smíšené číslo, zlomek v základním tvaru, rozšiřování/krácení zlomku, apod.). Jakmile studenti s OMJ akceptují českou terminologii, nedochází k žádným zásadnějším komplikacím.

Zajímavé je zjištění, že ruské i ukrajinské školství při sčítání a odčítání zlomků preferuje variantu úpravy zlomků na zlomky se stejným jmenovatelem (rozšířením zlomků) a způsob výpočtu „přes společného jmenovatele“ studenti s OMJ neznají a nepoužívají. Ti matematicky zdatnější jej však velmi rychle pochopili a nečinil jim žádný zásadnější problém.

příklad 2 (skupinová práce)

Studenti mají velký problém ze zadání poznat, jakou hodnotu vzít jako celek a podíl jakých hodnot mají vyjádřit zlomkem. I po nápovědě na doplnění tabulky o celkové součty (po dnech i po skupinách) činil výpočet jednotlivých podílů u některých z nich značné problémy.

U studentů s OMJ bylo pochopení zadání (vyjádření požadovaných podílů) ještě obtížnější, jelikož se jedná o poměrně „komplikovanou češtinu“, která způsobuje značné potíže i studentům s českým mateřským jazykem. Jakmile studenti s OMJ zadání pochopili, tak samotné určení jednotlivých podílů zvládali bez větších problémů.

Závěr

Výše uvedené příklady je vhodné použít jako opakování před testem ke kapitole „racionální čísla **Q** – zlomky, počítání se zlomky“. Oblast zlomků a počítání s nimi je první kapitolou, ve které se u některých studentů poměrně zásadním způsobem projevuje jistá matematická „zanedbanost“, kterou si přinášejí ze základních škol. Jinými slovy, někteří studenti se zlomky počítat prostě neumí, i když se s tím v učebních plánech všech středních škol počítá a časová dotace vymezena pro tuto oblast matematiky tak bývá velmi často nedostatečná. Tento nedostatek není specifikum pouze českých studentů, ale lze jej pozorovat i u studentů s OMJ.

Klíčová slova, slovník

zlomek - дріб [dr'ib]
čitatel - чисельник [čys**e**l'nyk]
jmenovatel - знаменник [znam**e**nnyk]
smíšené číslo - мішане число [m**i**šane čysl**o**]
složený zlomek - складний дріб [skladn**y**j dr'ib]
opačný zlomek - протилежний дріб [protyl**e**žnyj dr'ib]
pravý/nepravý zlomek - правильний/неправильний дріб [pr**a**vyl'nyj/nepr**a**vyl'nyj dr'ib]
společný jmenovatel - спільний знаменник [sp**i**l'nyj znam**e**nnyk]
převrácený zlomek - обернений дріб [ob**e**rnenyj dr'ib]
rozšiřování/krácení zlomků - розширення/скорочення дробів [rozš**y**reňňa/skor**o**čeňňa dr**o**biv]

Téma 5: Racionální čísla „Q“ - poměr, úměra

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
OP Praha – pól růstu ČR

Název projektu: Zlepšení inkluze při výuce zahradnictví

Registrační číslo projektu: CZ.07.4.68/0.0/0.0/16_037/0000291
KA01

Téma 5: Číselné obory – racionální čísla „Q“, část 3: poměr, úměra (matematika, 1. ročník)

Cíl: naučit žáky s OMJ schopnosti orientovat se a vyjadřovat se v oblasti racionálních čísel, konkrétně v oblasti poměrů a úměry

Úvod

Pojem „poměr“ a počítání s poměrem je základem řady početních postupů. Od jednoduchých (např. určování, které balení téhož výrobku je výhodnější) po složité (chemické výpočty koncentrací či stanovování složení látek). S poměrem dvou čísel se setkáváme na každém kroku v nejrůznějších situacích. Úměrou nazýváme rovnost dvou poměrů a rozlišujeme 2 základní typy úměry – přímou a nepřímou.

Dílčí oblasti:

1. Definice pojmu „poměr“, resp. „postupný poměr“
    - krácení poměru
    - rozšiřování poměru
    - rovnost poměrů
    - úměra

2. Přímá a nepřímá úměra, trojčlenka
    - přímo úměrné veličiny
    - nepřímo úměrné veličiny
    - trojčlenka

Příklad 1 (poměr) – studenti řeší individuálně

V následující tabulce jsou uvedeny počty studentů prvních ročníků maturitního („A“) a učňovského („U“) oboru Střední zahradnické školy a Středního odborného učiliště v Hloubětíně, a to ve členění dle jejich národnosti (česká/ukrajinská/ruská).

SZŠ Hloubětín „národnost“	Počty studentů ve třídách			
	1. A - chlapci	1. A - dívky	1. U - chlapci	1. U - dívky
česká	5	7	6	8
ukrajinská	4	2	3	6
ruská	2	1	1	2

S využitím znalostí vlastností a pravidel pro počítání s poměry řešte individuálně následující úkoly:

Úkoly/otázky

1. V jakém poměru je počet chlapců a dívek ukrajinské národnosti studujících v 1. A?
2. V jakém poměru je počet chlapců a dívek české národnosti studujících v 1. U?
3. V jakém poměru je počet chlapců a dívek ruské národnosti studujících v obou prvních ročnících SZŠ v Hloubětíně (1.A+1.U dohromady)?
4. V jakém poměru je počet chlapců a dívek studujících v 1. A?
5. V jakém poměru je počet chlapců a dívek studujících v 1. U?
6. V jakém poměru je počet chlapců a dívek studujících v obou prvních ročnících SZŠ v Hloubětíně (1.A+1.U dohromady)?
7. V jakém poměru je počet českých, ukrajinských a ruských studentů studujících v 1. A?
8. V jakém poměru je počet českých, ukrajinských a ruských studentů studujících v 1. U?
9. V jakém poměru je počet českých, ukrajinských a ruských studentů studujících v obou prvních ročnících SZŠ v Hloubětíně (1.A+1.U dohromady)?
10. Uveďte alespoň 2 poměry, které se rovnají (jsou shodné).

    Pozn.: Všechny požadované poměry vyjádřete v základním tvaru.

Doplňkové úkoly/otázky

11. Rozšířením poměru vyjádřete v základním tvaru následující poměry:
    a) 0,3 : 6
    b) 5 : 0,25
    c) 0,04 : 0,16
12. Počet všech studentů na SZŠ Hloubětín je 150. Rozdělte tento počet studentů v následujících poměrech:
    a) 2 : 3
    b) 11 : 4
    c) 10 : 3 : 2

Řešení, výsledky

1. 4 : 2, po krácení poměru číslem 2: **2 : 1**
2. 6 : 8, po krácení poměru číslem 2: **3 : 4**
3. 3 : 3, po krácení poměru číslem 3: **1 : 1**
4. **11 : 10** (poměr je již v základním tvaru)
5. 10 : 16, po krácení poměru číslem 2: **5 : 8**
6. **21 : 26** (poměr je již v základním tvaru)
7. 12 : 6 : 3, po krácení poměru číslem 3: **4 : 2 : 1**
8. **14 : 9 : 3** (poměr je již v základním tvaru)
9. **26 : 15 : 6** (poměr je již v základním tvaru)
10. Například poměr ukrajinských chlapců a dívek v 1. A (1 : 2) je shodný s poměrem ruských chlapců a dívek v 1. A (1 : 2). V poměru 1 : 2 jsou dále i ukrajinští nebo ruští studenti (chlapci x dívky) v 1. U.
11. a) 0,3 : 6 = 3 : 60 = 1 : 20 (poměr rozšíříme čísle 10 a následně zkrátíme číslem 3)
    b) 5 : 0,25 = 500 : 25 = 20 : 1 (poměr rozšíříme čísle 100 a následně zkrátíme číslem 25)
    c) 0,04 : 0,16 = 4 : 16 = 1 : 4 (poměr rozšíříme čísle 100 a následně zkrátíme číslem 4)
12. a) 1 dílek … 150 : 5 = 30 studentů, tzn. 2 : 3 = **60 : 90** (60 = 2*30, 90 = 3*30)
    b) 1 dílek … 150 : 15 = 10 studentů, tzn. 11 : 4 = **110 : 40** (110 = 11*10, 40 = 4*10)
    c) 1 dílek … 150 : 15 = 10 studentů, tzn. 10 : 3 : 2 = **100 : 30 : 20**
    (100 = 10*10, 30 = 3*10, 20 = 2*10)

Příklad 2 (přímá/nepřímá úměra, trojčlenka) – skupinová práce

Učitel zadá každé dvojici studentů následující 3 úkoly (viz níže) s tím, že studenti v každé dvojici si mohou navzájem napovídat a radit se. Vítězí ta dvojice studentů, která správně vyřeší všechny 3 úlohy. Za správné vyřešení není požadováno pouze uvedení výsledku, ale správný zápis hodnot zadaných veličin, správné určení typu úměry (přímá/nepřímá), odpovídající zápis šipek („↑↑“, „↑↓“), zápis trojčlenky, výpočet neznámé a uvedení odpovědi. To vše přitom musí splňovat oba studenti v dané dvojici.

Úkol 1

Ve výrobně sušeného ovoce zpracovali 350 kg čerstvých meruněk a získali z nich 55 kg sušených meruněk. Kolik kg sušených meruněk získají, když zpracují 10,5 t čerstvého ovoce.

Řešení

Přímá úměra, výsledek: **1 650 kg**

Úkol 2

V rámci odborné praxe na Petříně (jarní řez růží) 12 studentů 2. A sestříhalo požadovaný počet záhonů za 6,5 hodin. Za jak dlouho by studenti 2. A provedli jarní řez růží, kdyby se na praxi dostavili úplně všichni studenti 2. A, tzn. v počtu 15 studentů. Předpokládáme, že všichni studenti 2. A stříhají růže stejným tempem.

Řešení

Nepřímá úměra, výsledek: **5,2 hod = 5 hod 12 min**

Úkol 3

10 studentů 1. A sklidilo na brigádě ve Vizovicích za týden (5 pracovních dní) 55 tun švestek. Kolik tun švestek by sklidilo 12 studentů 1. U za 2 týdny (10 prac. dní), pokud by sbírali švestky stejným tempem jako studenti z 1. A?

Řešení

Přímá úměra (2-krát), výsledek: **132 t**

Reakce studentů (zpětná vazba)

příklad 1 (individuální)

Studenti s českým mateřským jazykem i studenti s OMJ mají problém ze zadaného úkolu určit, z jakého základu má být požadovaný poměr určen, což ostatně většina z nich i uvedla v Dotazníku na „Zpětnou vazbu“. Následné rozšiřování/krácení poměrů zvládali studenti bez větších problémů.

příklad 2 (skupinová práce)

Přímá úměra není u studentů takový problém jako úměra nepřímá. Studenti (bez rozdílu na MJ) zapomínají převádět hodnoty jednotlivých „veličin“ na odpovídající jednotky. Jakmile je potřeba v úloze úměru (přímou/nepřímou) použít opakovaně, činí to u studentů značné problémy (opět bez rozdílu na mateřský jazyk). Překvapující je rovněž zjištění, že studenti nejsou příliš schopni jednoduché příklady na přímou úměru řešit zpaměti bez zápisu „šipek“ a odpovídající trojčlenky. Navíc nemalé problémy činí vyjádřit si ze zápisu trojčleny danou neznámou.

Závěr

Výše uvedené příklady je vhodné použít jako opakování před testem ke kapitole „racionální čísla **Q** – poměr, úměra“. Matematicky zdatnější studenti zvládají tuto oblast matematiky celkem bez větších problémů a to i bez použití „šipkových schémat“. Příklady jsou velmi často schopni spočítat pouze s využitím vlastního „selského rozumu“. Největším problémem tak v současné době je fakt, že na odborných středních školách je matematicky zdatných studentů velmi omezený počet. Studenti s OMJ v této oblasti matematiky nepředstavují žádné specifikum a celkem bez větších problémů zvládají i českou terminologii.

Klíčová slova, slovník

poměr - відношення [vidn**o**šeňňa]
postupný poměr - відношення трьох і більше чисел [vidn**o**šeňňa tr’och i b**i**l’še č**y**sel]
krácení poměru - скорочення членів відношення [skor**o**čeňňa čl**e**ňiv vidn**o**šeňňa]
rozšiřování poměru - множення членів відношення на однакове число [mn**o**žeňňa čl**e**ňiv vidn**o**šeňňa na odn**a**kove čysl**o**]
rovnost poměru - рівність відношення [r’**i**vňist’ vidn**o**šeňňa]
úměra - пропорція [prop**o**rc’ija]
přímá úměra - пряма пропорційність [pr’am**a** proporc’**i**jňist’]
nepřímá úměra - обернена пропорційність [ob**e**rnena proporc’**i**jňist’]
trojčlenka - пропорція [prop**o**rc’ija]

Téma 6: Racionální čísla „Q“ - procento, promile

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
OP Praha – pól růstu ČR

PRAHA
PRAGUE
PRAGA
PRAG

Název projektu: Zlepšení inkluze při výuce zahradnictví

Registrační číslo projektu: CZ.07.4.68/0.0/0.0/16_037/0000291
KA01

Téma 6: Číselné obory – racionální čísla „Q“, část 4: procento, promile (matematika, 1. ročník)

Cíl: naučit žáky s OMJ schopnosti orientovat se a vyjadřovat se v oblasti racionálních čísel, konkrétně v oblasti procent a promilí.

Úvod

Kromě zlomků můžeme část nějakého celku vyjádřit i jiným způsobem – pomocí procent, resp. pomocí promilí. S procenty se v běžném životě setkáváme na každém kroku – slevy zboží, zdražení služeb, úspěšnost testu, složení potravin, dopravní značky upozorňující na prudké klesání či nabídky finančních ústavů na zúročení hotovosti. S promilemi už se tak často nesetkáváme, nejčastěji asi při měření hladiny alkoholu v krvi. Pro správné počítání s procenty a promilemi je potřeba znát přímou úměru a skutečnost, že 1 procento je setina daného celku a 1 promile je tisícina daného celku.

Dílčí oblasti:

1. Definice pojmu „procento“, resp. „promile“
    - základ („z“)
    - procentová část („c“)
    - počet procent („p“)

2. Výpočet „c“/“p“/“z“
    - s využitím trojčlenky
    - přes jedno procento

Příklad 1 – studenti řeší individuálně

S využitím znalostí pro výpočet „c“/“p“/“z“ řešte následující úkoly (pro výpočet můžete využít jak trojčlenku, tak i způsob výpočtu „přes jedno procento“):

Úkoly/otázky

1. Kolik litrů je 1,2 % z 1,44 hl?
2. Kolik metrů je 135 % z 23,8 km?
3. Kolik procent je 164 mm z 521 cm?
4. Kolik procent je 2 310 dag z 24,5 kg?
5. Vypočítejte velikost základu, když víte, že se 250 % rovná 800 dm^3. Výsledek uveďte v mililitrech.
6. Vypočítejte velikost základu, když víte, že se 2,4 % rovná 0,10224 hl. Výsledek uveďte v litrech.
7. Kolik promile je 916 ze 4 500?
8. Kolik je 1 256 ‰ ze 144?
9. Z jakého základu je 72 ‰ 162?
10. Doplňte chybějící údaje v následující tabulce:

Základ	215	1,2		2 160	14/15	
Procentová část	172		60	270		117
Počet procent		33,3333	125		25	36

11. Kolik stromků se vysází na plochu o výměře 2 ha ve sponu 6 m na 6 m?
12. Kolik rostlin nasázíte na záhon o výměře 10 m^2 ve sponu 15 cm x 15 cm?

Řešení, výsledky

1. trojčlenka: c = (p/100)*z = 0,012 * 1,44 hl = 0,01728 hl = 1,728 l
2. trojčlenka: c = (p/100)*z = 1,35 * 23,8 km = 32,13 km = 32 130 m
3. trojčlenka: p = (c/z)*100% = (16,4/521)*100% = 3,15 % (po zaokrouhlení)
4. trojčlenka: p = (c/z)*100% = (23,1/24,5)*100% = 94,3 % (po zaokrouhlení)
5. trojčlenka: z = (c/p)*100% = (800/250)*100% = 320 dm^3 = 320 l = 320 000 ml
6. trojčlenka: z = (c/p)*100% = (0,10224/2,4)*100% = 4,26 hl = 426 l
7. trojčlenka: p = (c/z)*1000‰ = (916/4500)*1000‰ = 204 ‰ (po zaokrouhlení)
8. trojčlenka: c = (p/1000)*z = (1256/1000)*144 = 181 (po zaokrouhlení)
9. trojčlenka: z = (c/p)*1000‰ = (162/72)*1000‰ = 2 250
10.

Základ (z)	215	1,2	**48**	2 160	14/15	**325**
Procentová část (c)	172	**0,4**	60	270	**7/30**	117
Počet procent v % (p)	**80**	33,3333	125	**12,5**	25	36

11. výsledek: n = S/a^2 = 20 000 / 6^2 = 555,555 (po zaokrouhlení 556 stromků)
12. výsledek: n = S/a^2 = 10 / $0,15^2$ = 444,444 (po zaokrouhlení 445 rostlin)

Příklad 2 – skupinová práce

Učitel zadá každé dvojici studentů následující 2 slovní úlohy (viz níže) s tím, že studenti v každé dvojici si mohou navzájem napovídat a radit se. Vítězí ta dvojice studentů, která správně vyřeší obě slovní úlohy. Za správné vyřešení není požadováno pouze uvedení výsledku, ale správně zvolené hodnoty c/p/z včetně způsobu výpočtu (trojčlenkou nebo „přes jedno procento“) hledané neznámé a uvedení odpovědi. To vše přitom musí splňovat oba studenti v dané dvojici.

Slovní úloha 1

Pan Zahradníček si koupil nový zahradní traktor značky Husqvarna, který stál 93 000 Kč. Ihned zaplatil 60 % ceny traktoru a poté ve 24 splátkách 2 325 Kč. O kolik procent mu bude navýšena původní cena?

Řešení

- nejdříve spočítáme 60 % z 93 000 Kč: 55 800 Kč
- poté vyčíslíme celkovou částku zaplacenou ve splátkách: 24*2 325 Kč = 55 800 Kč
- původní cena (z): 93 000 Kč, zaplacená cena (c): 55 800 Kč + 55 800 Kč = 111 600 Kč
- trojčlenka: p = (c/z) * 100 % = (111 600 / 93 000) * 100 % = 120 %
- odpověď: Původní cena traktoru bude navýšena o 20 %.

Slovní úloha 2

Původní cena křovinořezu byla nejprve zlevněna o 15 % a pak ještě o dalších 20 %. Konečná cena křovinořezu byla 7 480 Kč. Jaká byla původní cena křovinořezu?

Řešení

- nejdříve spočítáme cenu po prvním snížení (přes 1 %):
  80 % … 7 480 Kč
  1 % … 93,50 Kč
  100 % … 100 * 93,50 Kč = 9 350 Kč
- následně dopočítáme původní cenu křovinořezu (přes 1 %):
  85 % … 9 350 Kč
  1 % … 110,00 Kč
  100 % … 100 * 110,00 Kč = 11 000 Kč
- odpověď: Původní cena křovinořezu byla 11 000 Kč.

Reakce studentů (zpětná vazba)

příklad 1 (individuální)

Při výpočtech příkladů na procenta/promile není žádný významný rozdíl mezi českými studenty a studenty s OMJ. Jak přímo z hodin matematiky, tak i z vyplněných Dotazníků na „Zpětnou vazbu“ se ukazuje, že studenti s OMJ preferují spíše variantu „přes 1 %“, ale bez větších problémů zvládají i trojčlenku.

Studenti celkem bez problémů zvládají výpočty c/p/z v případě, že jsou v zadání celá čísla bez jednotek. Jakmile jsou v zadání desetinná čísla a navíc je potřeba zadané hodnoty převádět na shodné jednotky a výsledky případně navíc zaokrouhlovat, chybovost výpočtu rapidně vzroste (i když se principálně jedná o ten samý postup jako v případě „hezkých“ celočíselných příkladů).

příklad 2 (skupinová práce)

Slovní úlohy na procenta představují pro většinu studentů problém a zvládají je pouze studenti s větším citem pro matematiku. Tzn. odlišný mateřský jazyk nemá na úspěšnost řešení slovních úloh na procenta žádný zásadní vliv. Problémem u studentů s OMJ s nízkou znalostí češtiny může být nedostatečné pochopení zadání slovních úloh

Závěr

Výše uvedené příklady je vhodné použít jako opakování před testem ke kapitole „racionální čísla **Q** – procenta, promile“. Studenti s citem pro matematiku zvládají tuto oblast matematiky celkem bez větších problémů (počet těchto studentů na středních odborných není však příliš vysoký). Většina studentů tak složitější příklady na procenta nezvládá a nedokážou spočítat ani jednoduché příklady na výpočet výše DPH, resp. úroku při dané roční úrokové sazbě.

Klíčová slova, slovník

procento - відсоток [vids**o**tok]
procentová část - „частина” [čast**y**na]
promile - проміле [prom**i**le]
základ - „все” [vse]
počet procent - „частина у відсотках” [čast**y**na u vids**o**tkach]

Téma 7: Reálná čísla „R“ - početní operace, absolutní hodnota

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
OP Praha – pól růstu ČR

PRAHA PRAGUE PRAGA PRAG

Název projektu: Zlepšení inkluze při výuce zahradnictví

Registrační číslo projektu: CZ.07.4.68/0.0/0.0/16_037/0000291
KA01

Téma 7: Číselné obory – reálná čísla „R“, část 1: početní operace, absolutní hodnota (matematika, 1. ročník)

Cíl: naučit žáky s OMJ schopnosti orientovat se a vyjadřovat se v oblasti reálných čísel, konkrétně v oblasti početních operací a absolutní hodnoty.

Úvod

Reálnými čísly („**R**“) souhrnně označujeme čísla racionální („**Q**“) a čísla iracionální („**I**“). Iracionální čísla přitom vznikla tak, že v některých případech si matematikové s přirozenými ani racionálními čísly nevystačili. Například nelze určit délky stran čtverce o obsahu 3 cm^2, 5 cm^2 nebo 6 cm^2 v množině racionálních čísel. Dnes tato čísla označujeme jako $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, resp. $\sqrt{6}$ a jedná se o tzv. iracionální čísla.

Jedním z nejznámějších iracionálních čísel je číslo π (pí). Toto číslo vyjadřuje poměr obvodu libovolného kruhu k jeho průměru. O přesné nalezení této hodnoty se snažili učenci již odpradávna. Prvním, kdo přesněji vypočítal hodnotu této konstanty, byl ve 2. polovině 16. století nizozemský matematik Ludolf van Ceulen (podle něj je často označována jako Ludolfovo číslo).

Dílčí oblasti:

1. Početní operace v „**R**“
    - iracionální čísla „**I**“, „**R**“ = „**Q**“ ∪ „**I**“
    - vztah mezi „**N**“, „**Z**“ a „**Q**“: „**N**“c „**Z**“ c „**Q**“
    - porovnávání reálných čísel
    - vlastnosti operací v „**R**“

2. Absolutní hodnota
    - geometrický význam abs. hodnoty
    - vlastnosti absolutní hodnoty
    - počítání s absolutními hodnotami

Příklad 1 – studenti řeší individuálně

S využitím znalostí o číselných oborech řešte následující úkoly:

Úkoly/otázky

1. Uveďte příklad:
    a) největšího trojciferného celého čísla
    b) dvou iracionálních čísel větších než 2
    c) tří racionálních čísel větších než 3 a menších než 5
    d) dvou iracionálních čísel větších než 3 a menších než 5

2. Doplňte do tabulky ano/ne podle toho, zda číslo x patří, nebo nepatří do daného číselného oboru.

Číslo x	Číselný obor				
	N	**Z**	**Q**	**I**	**R**
314					
$\sqrt{5}$					
$1{,}5\overline{34}$					
-31/7					
15,4567					

3. Porovnejte následující čísla a seřaďte je vzestupně.
    a) 7,156 ; $7{,}1\overline{56}$; 7,651 ; 1789/251 ; 7,1
    b) $-103{,}\overline{6}$; $\sqrt{10\,000}$; 99,9 ; 0,999 ; -103,6
    c) 1,4 ; $\sqrt{2}$; $1{,}3\overline{9}$; 1,41 ; $\sqrt{3}$

4. Uveďte příklad čísla, které:
   a) je reálné, je celé a není přirozené
   b) je racionální, není iracionální a není celé
   c) je iracionální, je racionální a je celé
   d) je reálné, není celé a není racionální

Řešení, výsledky

1. a) **999** , b) např. $\sqrt{\mathbf{5}}$ a Ludolfovo číslo $\boldsymbol{\pi}$, c) např. **3,25** , **10/3** a **4** , d) např. $\boldsymbol{\pi}$ a $\sqrt{\mathbf{10}}$
2.

Číslo x	Číselný obor				
	N	**Z**	**Q**	**I**	**R**
314	ano	ano	ano	ne	ano
$\sqrt{5}$	ne	ne	ne	ano	ano
$1{,}5\overline{34}$	ne	ne	ano	ne	ano
-31/7	ne	ne	ano	ne	ano
15,4567	ne	ne	ano	ne	ano

3. a) 7,1 ; 1789/251 ; 7,156 ; $7{,}1\overline{56}$; 7,651
   b) -103,6 ; $-103{,}\overline{6}$; 0,999 ; 99,9 ; $\sqrt{10\,000}$
   c) $1{,}3\overline{9}$; 1,4 ; 1,41 ; $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$

4. a) např. 0 nebo -2 nebo -5 apod.
   b) např. 2,57 nebo 3/5 nebo -0,5 apod.
   c) žádné takové číslo neexistuje
   d) např. π nebo $\sqrt{2}$

Příklad 2 – studenti řeší individuálně

S využitím znalostí o absolutní hodnotě řešte následující úkoly:

Úkoly/otázky

1. Uveďte příklad:
   a) celého čísla, jehož absolutní hodnota je menší nebo rovna 1
   b) racionálního čísla, jehož absolutní hodnota je větší než 3
   c) dvou takových záporných čísel, rozdíl jejichž absolutních hodnot je kladné číslo
   d) dvou dvojic čísel, jejichž obrazy na číselné ose mají od sebe stejnou vzdálenost

2. Vypočítejte následující úlohy:
   a) $|-3| \cdot |5 - 7| + |9 - |13 - 11|| - 13 =$
   b) $|\sqrt{5} - 2| - \sqrt{5} + |1 + \sqrt{3}| - \sqrt{3} =$
   c) $||\sqrt{5} - \sqrt{3}| - |\sqrt{5} + \sqrt{3}| - 3\cdot\sqrt{3}| - \sqrt{3} =$

3. Doplňte znaky > , < , = tak, aby byly vztahy zapsané správně.
   a) $|-2 - |-3 - 4|| - 1 \;\ldots\; |4 - |-3 - 2|| + |-9|$
   b) $-|15 + |1 - 16|| \;\ldots\; 2|4 - 13| + 3|10 - 15|$

4. Zapište pomocí absolutní hodnoty všechna reálná čísla x, pro která platí:
   a) $0 \leq x \leq 3$
   b) $-5 < x < -1$

Řešení, výsledky

1. a) zadanou podmínku splňují čísla -1 , 0 a 1
   b) např. 3,5 nebo -10/3 apod.
   c) např. -5 a -3 , jelikož platí: $|-5| - |-3| = 5 - 3 = 2$
   d) např. -8 a -5 ; 0 a 3 ; 7 a 10 (vzdálenost obrazů u těchto dvojic čísel na čís. ose je 3 j.)

2. a) $|-3| \cdot |5 - 7| + |9 - |13 - 11|| - 13 = 3 \cdot 2 + 7 - 13 = \mathbf{0}$
   b) $|\sqrt{5} - 2| - \sqrt{5} + |1 + \sqrt{3}| - \sqrt{3} = \sqrt{5} - 2 - \sqrt{5} + 1 + \sqrt{3} - \sqrt{3} = \mathbf{-1}$
   c) $||\sqrt{5} - \sqrt{3}| - |\sqrt{5} + \sqrt{3}| - 3\cdot\sqrt{3}| - \sqrt{3} = |\sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{5} - \sqrt{3} - 3\cdot\sqrt{3}| - \sqrt{3} = \mathbf{4\sqrt{3}}$

3. a) $|-2 - |-3 - 4|| - 1 < |4 - |-3 - 2|| + |-9|$ (jelikož $8 < 10$)
   b) $-|15 + |1 - 16|| < 2|4 - 13| + 3|10 - 15|$ (jelikož $-30 < 33$)

4. a) „střed“ mezi obrazy čísly 0 a 3 je obraz čísla 1,5 a vzdálenost od tohoto „středu“ k číslům 0 a 3 je 1,5 jednotek, tzn. zápis pomocí abs. hodnoty je: $\mathbf{|x - 1{,}5| \leq 1{,}5}$
   b) „střed“ mezi obrazy čísly -5 a -1 je obraz čísla -3 a vzdálenost od tohoto „středu“ k číslům -5 a -1 jsou 2 jednotky, tzn. zápis pomocí abs. hodnoty je: $\mathbf{|x - (-3)| < 2}$

Reakce studentů (zpětná vazba)

příklad 1

Studenti s OMJ, kteří jsou v ČR již delší dobu, resp. ti, kteří ihned po příjezdu do ČR projevují ochotu učit se češtinu a přijímají tak i „českou“ matematickou terminologii v oblasti číselných oborů (**N**, **Z**, **Q** , **I** a **R**), zvládají úkoly z oblasti reálných čísel bez větších problémů. Problémy s číselnými obory a jejich vlastnostmi nemají rovněž studenti s OMJ, kteří češtinu sice příliš neovládají, ale přijeli do ČR s již dosaženým vyšším vzděláním (absolvovali na Ukrajině nebo v Rusku již 11 let školní docházky). Největší problémy tak způsobuje oblast číselných oborů a jejich vlastností studentům s OMJ bez ochoty učit se česky, kteří navíc nedisponují příliš velkou matematickou inteligencí. Počet těchto studentů je přitom převažující (pravděpodobně se jedná o studenty, jejichž motivací není získání vyšší úrovně vzdělání, ale spíše potvrzení o studiu potřebné z důvodu prodloužení pobytu na území ČR). Tato neochota učit se česky a více se prohlubovat znalosti z matematiky se u některých studentů s OMJ projevuje i ve způsobu vyplňování Dotazníku ke „Zpětné vazbě“, který buď nevyplní vůbec nebo pouze formálním způsobem bez jakékoliv přidané hodnoty.

příklad 2

V případě počítání příkladů s absolutní hodnotou (příklad 2) lze pozorovat velmi podobné reakce studentů jako tomu je v případě oblasti číselných oborů. U těch se zájmem o češtinu nebo alespoň o matematiku je to bez problémů, u těch bez zájmu o obojí, lze pozorovat pouze pasivní přístup bez jakéhokoliv zapojení do vyhotovování zadaných úkolů. Tento jev lze ale pozorovat i u celé řady studentů s českým mateřským jazykem.

Závěr

Výše uvedené příklady je vhodné použít jako opakování před testem ke kapitole „reálná čísla **R** – početní operace, absolutní hodnota“. Zároveň je vhodné této kapitoly využít pro zopakování hlavních charakteristik všech dosud probíraných číselných oborů (**N**, **Z**, **Q** , **I** a **R**). Studenti s OMJ jsou opakovaně upozorňováni, že bez znalosti základní matematické terminologie v oblasti číselných oborů budou mít problémy v chápaní dalších částí matematiky. Bez znalostí počítání se zlomky, resp. příkladů na poměry, přímou/nepřímou úměru, procenta/promile apod. nelze úspěšně absolvovat předmět matematiky ve vyšších ročnících střední školy.

Klíčová slova, slovník

reálné číslo - дійсне число [ďi̲jsňe čysl**o**]
iracionální číslo - ірраціональне число [irac’ion**a**ľne čysl**o**]
absolutní hodnota – модуль / *zřídka* абсолютна величина [m**o**duľ / absoľ**u**tna velyčyn**a**]
ostře větší – більше ніж [b**i**ľše ňiž]
ostře menší – менше ніж [m**e**nše ňiž]
větší nebo rovno – більше або дорівнює [b**i**ľše abo dor’**i**vňuje]
menší nebo rovno – менше або дорівнює [m**e**nše abo dor’**i**vňuje]

Téma 8: Reálná čísla „R“ - mocniny s přirozeným a celým exponentem

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
OP Praha – pól růstu ČR

Název projektu: Zlepšení inkluze při výuce zahradnictví

Registrační číslo projektu: CZ.07.4.68/0.0/0.0/16_037/0000291
KA01

Téma 8: Číselné obory – reálná čísla „R“, část 2: mocniny s přirozeným a celým exponentem (matematika, 1. ročník)

Cíl: naučit žáky s OMJ schopnosti orientovat se a vyjadřovat se v oblasti reálných čísel, konkrétně v oblasti počítání s mocninami s přirozeným („N“) a celým („Z“) exponentem.

Úvod

Umocňování je vedle sčítání, odčítání, násobení a dělení další početní operací. Částečně jsme se s umocňováním seznámili už v kapitole Přirozená čísla („**N**“), kdy jsme pomocí mocnin deseti zapisovali čísla pomocí desítkového rozvinutého zápisu. V matematice ovšem nepracujeme jenom s čísly, která jsou mocninami deseti. Při počítání obsahu čtverce násobíme délku jeho stran (a·a), při počítání objemu krychle násobíme délku její hrany (a·a·a). Pracujeme tak se součinem stejných čísel, který lze vyjádřit zápisem pomocí mocnin. Mocniny přitom zapisujeme pomocí exponentu a pro počítání s nimi platí pravidla, která nám umožní počítat i složitější příklady. Podle toho, jaké hodnoty nabývá exponent, rozlišujeme mocniny s přirozeným, celým nebo racionálním exponentem. Nyní si ukážeme, jak jsou definovány a jak se počítá s mocninami s přirozeným a celým exponentem.

Způsob zápisu mocnin pomocí exponentu (malého čísla zapsaného vpravo nahoře nad umocňovaným číslem) je relativně nový. S druhou a třetí mocninou přitom pracovali již staří egyptští a indičtí matematikové. Ale zápis, který dnes používáme, zavedl až René Descartes v 17. století.

Dílčí oblasti:

1. Mocniny s přirozeným exponentem
    - definice n-té mocniny čísla a: „a^n“ , spec. případ: n=1, tzn. a^1
    - znaménko mocnin s přirozeným exponentem

2. Pravidla pro počítání s mocninami
    - násobení mocnin se stejným základem
    - umocňování mocniny
    - násobení mocnin s různými základy a stejnými exponenty
    - dělení mocnin s různými základy a stejnými exponenty

3. Mocniny s celým exponentem
    - definice mocniny s nulovým exponentem
    - definice mocniny se záporným exponentem
    - podíl mocnin se stejným základem
    - počítání mocnin a zlomků

Příklad 1 (mocniny s „**N**“ exponentem)– studenti řeší individuálně

S využitím znalostí o počítání mocnin s přirozeným exponentem řešte následující úkoly:

Úkoly/otázky

1. Bez počítání rozhodněte, zda je mocnina číslo kladné, nebo záporné:
   a) $(299)^1$ b) $(-13/9)^8$ c) $(-7 + 4)^5$ d) $(-3 \cdot 2)^{10}$

2. Zapište jako mocninu a vypočítejte.
   a) $(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) =$
   b) $(-0,1) \cdot (-0,1) \cdot (-0,1) \cdot (-0,1) \cdot (-0,1) \cdot (-0,1) =$
   c) $-(-5/9) \cdot (-5/9) \cdot (-5/9) =$

3. Doplňte do tabulky chybějící údaje.

Číslo x	Mocnina čísla x			
	x	x^2	x^3	x^4
3				
2/5				
			1	
		0,01		
			-1	
			-8	

4. Porovnejte čísla a seřaďte je vzestupně.
   a) $1{,}1^3$; $-1{,}2^2$; $(-1{,}3)^3$; $1{,}4^2$; $(-1{,}5)^2$
   b) -10^3 ; $(\sqrt{100})^2$; $(99{,}9)^1$; $-(1/100)^3$; $(-2\cdot 5)^2$

5. Pomocí pravidel pro počítání s mocninami vypočítejte následující úlohy.
   a) $(1/3)^2 \cdot 1/3^2 =$
   b) $(3/4)^5 \cdot 4^3/3^4 =$
   c) $3^3/2 : (2/3)^4 =$
   d) $(-5/8)^4 : (-5/8)^3 =$

6. Zjednodušte a vypočítejte následující úlohy.
   a) $-5^1 \cdot (-5)^3 \cdot 2^2 \ / \ (5^3 \cdot 2^2)^2 =$
   b) $((7^1 \cdot 3^3)^3 \cdot 1^6) / ((-3)^4 \cdot (-7)^2 \cdot 3^2) =$
   c) $(27^2 \cdot 32^3 \cdot 10^2) / (8^4 \cdot 36 \cdot 5^2 \cdot 6^3) =$

Řešení, výsledky

1. a) kladné číslo ($a > 0$) b) kladné číslo (n je sudé) c) záporné číslo ($a < 0$, n je liché)
   d) kladné číslo ($a < 0$, n je sudé)

2. a) $(-1)^7 = -1$ ($a < 0$, n je liché)
   b) $(-0{,}1)^6 = 0{,}000001$
   c) $-(-5/9)^3 = (5/9)^3 = 5^3 / 9^3 = 125/729$

3.

Číslo x	Mocnina čísla x			
	x	x^2	x^3	x^4
3	**3**	**9**	**27**	**81**
2/5	**2/5**	**4/25**	**8/125**	**16/125**
1	**1**	**1**	1	**1**
0,1	**0,1**	0,01	**0,001**	**0,0001**
-1	**-1**	**1**	-1	**1**
-2	**-2**	**4**	-8	**16**

4. a) $(-1{,}3)^3 < -1{,}2^2 < 1{,}1^3 < 1{,}4^2 < (-1{,}5)^2$
   b) $-10^3 < -(1/100)^3 < (99{,}9)^1 < (\sqrt{100})^2 = (-2\cdot 5)^2$

5. a) $(1/3)^2 \cdot 1/3^2 =$ **1/81**
   b) $(3/4)^5 \cdot 4^3/3^4 =$ **3/16**
   c) $3^3/2 : (2/3)^4 =$ **$9 \cdot (3/2)^5$**
   d) $(-5/8)^4 : (-5/8)^3 =$ **-5/8**

6. a) $-5^1 \cdot (-5)^3 \cdot 2^2 \ / \ (5^3 \cdot 2^2)^2 = \mathbf{0{,}01}$
   b) $((7^1 \cdot 3^3)^3 \cdot 1^6) \ / \ ((-3)^4 \cdot (-7)^2 \cdot 3^2) = \mathbf{189}$
   c) $(27^2 \cdot 32^3 \cdot 10^2) \ / \ (8^4 \cdot 36 \cdot 5^2 \cdot 6^3) = \mathbf{3}$

Příklad 2 (mocniny se „**Z**“ exponentem)– studenti řeší ve skupině

Učitel rozdělí třídu na 3 až 5 skupin (podle počtu studentů ve třídě) a následně postupně zadává příklady (otázky) z oblasti počítání mocnin s celými exponenty. Následně vybere záznamy odpovědí a vyhodnotí úspěšnost řešení v jednotlivých skupinách a určí výsledné pořadí.

Úkoly/otázky

1. Uveďte příklad:
   a) čísla, které je po umocnění na záporný exponent záporné.
   b) čísla, které má po umocnění na libovolný exponent (kladný i záporný) stejnou hodnotu.
   c) mocniny větší než 1 se základem menším než 1.

2. Vypočítejte zpaměti následující mocniny. Výsledek zapište v podobě zlomku.
   a) 3^{-3} b) $(1/4)^{-2}$ c) $(-5)^{-3}$ d) $0{,}9^{-2}$ e) $-(-1)^{14}$ f) $(0{,}1)^{-4}$

3. Vypočítejte zpaměti následující mocniny.
   a) $-3^{-1} \cdot 3$ b) $-1^{-1} \cdot (-1)^3$ c) $[(-2)^2]^{-2}$ d) $-4^{-2} \cdot 16$

4. Zapište ve tvaru jedné mocniny.
   a) $5^{-2} \cdot 5^4 \cdot 5^1$ b) $4^0 \cdot 4^{-2} \cdot 4^{10}$ c) $3^{-3} / (3^2 \cdot 3^{-5})$

5. Následující číselné údaje zapište ve tvaru $a \cdot 10^n$, kde $1 \leq a < 10$ a n je celé číslo.
   a) V lidské krvi je průměrně asi 7 400 000 000 bílých krvinek na 1 litr krve.
   b) Délka zemského rovníku je 40 075 000 m.
   c) Botanická zahrada má výměru 260 000 $m^{2.}$

6. Vypočítejte následující úlohy:
   a) $((-2)^{-2} \cdot (1/2)^{-3} + (1/2)^{-1}) \ / \ (11^0 \cdot 5^{-3} \cdot 0{,}2^{-2} + 5^{-1}) =$
   b) $[(5-8)^3 + |3 \cdot 2^2|]^{-2} \ / \ ((-3)^{-2} \cdot (5/7)^{-1}) =$

Řešení, výsledky

1. a) např. $(-1/2)^{-3}$ b) číslo 1 c) např. $(1/2)^{-3}$

2. a) 1/27 b)16 c) -1/125 d) 100/81 e) -1 f) 10 000

3. a) -1 b) 1 c) 1/16 d) -1

4. a) 5^3 b) 4^8 c) $3^0 = 1$

5. a) $7{,}4 \cdot 10^9$ b) $4{,}0075 \cdot 10^7$ c) $2{,}6 \cdot 10^5$

6. a) 10 b) 1/35

Reakce studentů (zpětná vazba)

příklad 1

Oblast počítání mocnin s přirozenými i celočíselnými exponenty je první rozsáhlejší částí učiva prvního ročníku matematiky na střední škole, která není detailně probírána na škole základní. V případě mocnin s přirozeným exponentem zvládají studenti příklady celkem bez větších problémů a odlišnosti v mateřském jazyce se na úspěšnosti řešení příkladů nijak neprojevují. Jisté komplikace způsobuje pouze určování výsledného znaménka v případě příkladů s opakovaným výskytem záporných čísel. Podobným způsobem vnímají „problémové oblasti“ této části matematiky i samotní studenti, což vyplynulo i z jejich zpětných vazeb uvedených v dotaznících.

příklad 2

V případě příkladů s celočíselnými exponenty způsobuje největší komplikace převedení mocnin se záporným exponentem na mocniny s exponentem přirozeným. Nemalá část studentů má rovněž problém s příklady, u kterých je základ mocniny vyjádřen v podobě zlomku. I zde ovšem platí, že tyto problémy nesouvisí ani tak s odlišnostmi v mateřském jazyce, ale spíše v nedostatečně zvládnuté oblasti počítání se zlomky.

Závěr

Výše uvedené příklady lze využít při opakování před testem ke kapitole „reálná čísla **R** – mocniny s přirozeným a celočíselným exponentem“. S ohledem na skutečnost, že tato oblast matematiky je více o počítání než o terminologii, nezpůsobuje zde nižší úroveň znalosti českého jazyka u studentů s OMJ žádné větší komplikace. Nemalý počet studentů 1. ročníku výpočet příkladů s mocninami přesto příliš nezvládá. Důvodem ale nejsou odlišnosti v mateřském jazyce, ale spíše nedostatečně zvládnutá oblast počítání se zlomky, především pak jejich násobení, dělení a převod na zlomky převrácené (při převodu mocnin se záporným exponentem na mocniny s přirozeným exponentem).

Klíčová slova, slovník

mocnina – степінь [st**e**piň]
základ mocniny – основа степеня [osn**o**va st**e**peňa]
mocniny s přirozeným exponentem – степені з натуральним показником [st**e**peňi z natur**a**ľnym pok**a**znykom]
mocniny s celým exponentem – степені з цілим показником [st**e**peňi z c’**i**lym pok**a**znykom]
mocniny se záporným exponentem – степені з від’ємним показником [st**e**peňi z vidj**e**mnym pok**a**znykom]
násobení mocnin – множення степенів [mn**o**žeňňa st**e**peňiv]
umocňování mocnin – піднесення степеня до степеня [pidn**e**seňňa st**e**peňa do st**e**peňa]
dělení mocnin – ділення степенів [ď**i**leňňa st**e**peňiv]

Téma 9: Reálná čísla „R“ - odmocniny

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
OP Praha – pól růstu ČR

PRAHA PRAGUE PRAGA PRAG

Název projektu: Zlepšení inkluze při výuce zahradnictví

Registrační číslo projektu: CZ.07.4.68/0.0/0.0/16_037/0000291
KA01

Téma 9: Číselné obory – reálná čísla „R“, část 3: odmocniny (matematika, 1. ročník)

Cíl: naučit žáky s OMJ schopnosti orientovat se a vyjadřovat se v oblasti reálných čísel, konkrétně v obl. počítání s odmocninami.

Úvod

Matematická operace odmocňování je inverzní (obrácenou, zpětnou) operací k umocňování. Výsledek této operace nazýváme odmocnina a pro její označení používáme symbol „√“.

Vysvětlení původu znaku pro odmocninu „√“ je do značné míry spekulativní. Někteří historici matematiky se domnívají, že tento symbol poprvé použili Arabové v polovině 15. století (existuje domněnka, že bylo převzato z prvního písmene arabského slova *džidhr*, což je v češtině výraz pro slovo kořen). Mnozí se naopak domnívají, že pochází z písmene „r“, prvního písmene latinského slova *radix*, které také znamená slovo kořen.

Bez odmocnin není možné realizovat ani nejjednodušší výpočty v každodenní praxi ani nejsložitější výpočty v nejpokročilejších vědních disciplínách.

Dílčí oblasti:

1. Definice odmocniny
   - definice n-té odmocniny
   - definice druhé a třetí odmocniny
   - druhá odmocnina a absolutní hodnota

2. Pravidla pro počítání s odmocninami (n, m – přirozené číslo; a, b – nezáporná reálná čísla)
   - součin odmocnin ($\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$)
   - odmocňování odmocnin ($\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$)
   - odmocnina zlomku ($\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b \neq 0$)
   - umocňování odmocniny ($(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$, $spec.: \sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a$)

Příklad 1 (odmocniny)– studenti řeší individuálně

S využitím znalostí o počítání odmocnin řešte následující úkoly:

Úkoly/otázky

1. Vypočítejte zpaměti následující odmocniny:
   a) $\sqrt{360\,000}$ b) $\sqrt{0{,}000\,081}$ c) $\sqrt{14\,400}$ d) $\sqrt[3]{0{,}001}$

2. Vypočítejte následující odmocniny:
   a) $\sqrt{1{,}21}$ =
   b) $\sqrt[3]{125/27}$ =
   c) $\sqrt[4]{2\,560\,000}$ =
   d) $\sqrt[5]{0{,}000\,32}$ =

3. Doplňte do tabulky čísla ve tvaru x, $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{b}$, $\sqrt[4]{c}$ tak, aby platilo $\sqrt{a}$ = x, $\sqrt[3]{b}$ = x, $\sqrt[4]{c}$ = x, kde x, a, b, c jsou nezáporná reálná čísla.

X	2					
$\sqrt{\boldsymbol{a}}$			$\sqrt{0{,}09}$		$\sqrt{1/25}$	
$\sqrt[3]{\boldsymbol{b}}$		$\sqrt[3]{1}$				
$\sqrt[4]{\boldsymbol{c}}$				$\sqrt[4]{\pi^4}$		$\sqrt[4]{81}$

4. Zapište následující čísla jako jednu odmocninu.
   a) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{27}}$ =
   b) $\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{5^2} \cdot \sqrt[3]{5^4}$ =
   c) $\sqrt[3]{7 \cdot \sqrt{7}}$ =
   d) $\sqrt{\frac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt{6}}}$ =

5. Následující odmocniny částečně odmocněte.
   a) $\sqrt{75}$ =
   b) $\sqrt[3]{72}$ =
   c) $\sqrt[3]{625}$ =
   d) $\sqrt{600}$ =

Řešení, výsledky

1. a) $\sqrt{360\,000} = \mathbf{600}$ b) $\sqrt{0{,}000\,081} = \mathbf{0{,}009}$
   c) $\sqrt{14\,400} = \mathbf{120}$ d) $\sqrt[3]{0{,}001} = \mathbf{0{,}1}$

2. a) $\sqrt{1{,}21} = \sqrt{121 \cdot 0{,}01} = \sqrt{121} \cdot \sqrt{0{,}01} = 11 \cdot 0{,}1 = \mathbf{1{,}1}$
   b) $\sqrt[3]{125/27} = \sqrt[3]{125} \;/\; \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{5^3} \;/\; \sqrt[3]{3^3} = \mathbf{5/3}$
   c) $\sqrt[4]{2\,560\,000} = \sqrt[4]{256 \cdot 10\,000} = \sqrt[4]{256} \cdot \sqrt[4]{10\,000} = \sqrt[4]{4^4} \cdot \sqrt[4]{10^4} = 4 \cdot 10 = \mathbf{40}$
   d) $\sqrt[5]{0{,}000\,32} = \sqrt[5]{32 \cdot 0{,}000\,01} = \sqrt[5]{32} \cdot \sqrt[5]{0{,}000\,01} = \sqrt[5]{2^5} \cdot \sqrt[5]{0{,}1^5} = 2 \cdot 0{,}1 = \mathbf{0{,}2}$

3.

x	2	1	0,3	π	$1/\sqrt{5}$	3
$\sqrt{\boldsymbol{a}}$	$\sqrt{\mathbf{4}}$	$\sqrt{\mathbf{1}}$	$\sqrt{0{,}09}$	$\sqrt{\boldsymbol{\pi}^2}$	$\sqrt{1/25}$	$\sqrt{\mathbf{9}}$
$\sqrt[3]{\boldsymbol{b}}$	$\sqrt[3]{\mathbf{8}}$	$\sqrt[3]{1}$	$\sqrt[3]{\mathbf{0{,}027}}$	$\sqrt[3]{\boldsymbol{\pi}^3}$	$\sqrt[3]{\mathbf{1/125}}$	$\sqrt[3]{\mathbf{27}}$
$\sqrt[4]{\boldsymbol{c}}$	$\sqrt[4]{\mathbf{16}}$	$\sqrt[4]{\mathbf{1}}$	$\sqrt[4]{\mathbf{0{,}0081}}$	$\sqrt[4]{\pi^4}$	$\sqrt[4]{\mathbf{1/625}}$	$\sqrt[4]{81}$

4. a) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{27}} = \sqrt[12]{3^3} = \sqrt[4]{\mathbf{3}}$

   b) $\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{5^2} \cdot \sqrt[3]{5^4} = \sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{5^2 \cdot 5^4} = \sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{5^2 \cdot 5^4} = \sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{5^6} = \sqrt{5} \cdot 5^2 = \mathbf{25} \cdot \sqrt{\mathbf{5}}$
   c) $\sqrt[3]{7 \cdot \sqrt{7}} = \sqrt[3]{\sqrt{7^2} \cdot \sqrt{7}} = \sqrt[3]{\sqrt{7^2 \cdot 7}} = \sqrt[3]{\sqrt{7^3}} = \sqrt[6]{7^3} = \sqrt[2\cdot 3]{7^3} = \sqrt{\mathbf{7}}$
   d) $\sqrt{\dfrac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt{6}}} = \sqrt{\dfrac{\sqrt[6]{6^2}}{\sqrt[6]{6^3}}} = \sqrt{\sqrt[6]{\dfrac{1}{6}}} = \sqrt[\mathbf{12}]{\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}}$

5. a) $\sqrt{75} = \sqrt{3 \cdot 25} = \mathbf{5} \cdot \sqrt{\mathbf{3}}$
   b) $\sqrt[3]{72} = \sqrt[3]{9 \cdot 8} = \sqrt[3]{3^2 \cdot 2^3} = \sqrt[3]{3^2} \cdot \sqrt[3]{2^3} = \mathbf{2} \cdot \sqrt[3]{\mathbf{3^2}}$
   c) $\sqrt[3]{625} = \sqrt[3]{5 \cdot 125} = \sqrt[3]{5 \cdot 5^3} = \mathbf{5} \cdot \sqrt[3]{\mathbf{5}}$
   d) $\sqrt{600} = \sqrt{6 \cdot 100} = \sqrt{6 \cdot 10^2} = \mathbf{10} \cdot \sqrt{\mathbf{6}}$

Příklad 2 (odmocniny)– studenti řeší ve dvojicích

Učitel zadává postupně celé třídě následujících 5 příkladů s tím, že studenti vytvoří dvojice, ve kterých můžou vzájemně spolupracovat. Po výpočtu každého příkladu napíše na tabuli první tři dvojice, které daný příklad spočítaly správně a přiřadí jim dle pořadí 3, 2 a 1 bod. Po výpočtu posledního příkladu provede učitel součet bodů získaných jednotlivými dvojicemi a nejlepší 3 dvojice ohodnotí „velkou“, „střední“ a „malou“ jedničku.

Příklady

1. $5\sqrt{6} - 6\sqrt{24} + 3\sqrt{54} + 2\sqrt{150} - \sqrt{216} =$

2. $\frac{\sqrt[3]{10} \cdot \sqrt[3]{20}}{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{100}} =$

3. $\sqrt[5]{\frac{2 \cdot \sqrt[3]{4}}{\sqrt{8}}} =$

4. $\sqrt{\frac{3}{5} \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{5} \cdot \sqrt{5 \cdot 3^{-1}}}} =$

5. $\sqrt[6]{\frac{5 \cdot \sqrt[3]{3}}{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{\sqrt{27}}{2 \cdot \sqrt{45}}} =$

Výsledky

1. $5\sqrt{6} - 6\sqrt{24} + 3\sqrt{54} + 2\sqrt{150} - \sqrt{216} = \mathbf{6\sqrt{6}}$

2. $\frac{\sqrt[3]{10} \cdot \sqrt[3]{20}}{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{100}} = \mathbf{\sqrt[3]{\frac{2}{3}}}$

3. $\sqrt[5]{\frac{2 \cdot \sqrt[3]{4}}{\sqrt{8}}} = \mathbf{\sqrt[30]{2}}$

4. $\sqrt{\frac{3}{5} \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{5} \cdot \sqrt{5 \cdot 3^{-1}}}} = \mathbf{\sqrt[12]{(\frac{3}{5})^7}}$

5. $\sqrt[6]{\frac{5 \cdot \sqrt[3]{3}}{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{\sqrt{27}}{2 \cdot \sqrt{45}}} = \mathbf{\frac{\sqrt[18]{3}}{\sqrt[3]{2}}}$

Reakce studentů (zpětná vazba)

příklad 1 i příklad 2

Oblast počítání odmocnin způsobuje problémy jak studentům s českým mateřským jazykem, tak i studentům s mateřským jazykem odlišným. Jinými slovy, oblast počítání odmocnin není ani tak o mateřském jazyku, jako spíše o tom, jakým způsobem mají studenti zvládnuté základní početní operace a vlastnosti z oblasti přirozených čísel (společný násobek), bez kterých jen velmi obtížně dokáží převádět jednotlivé odmocniny na stejný typ odmocniny (stejné „n“), resp. z oblasti rac. čísel, které je třeba zase využít při „krácení“ nebo „rozšiřování“ různých „exponentů“ odmocnin tak, abychom při výpočtech číselných výrazů s odmocninami docílili stavu, kdy budeme mít všechny odmocniny se shodným „n“.

Příklady s odmocninami (viz příklad 2) zvládali pouze matematicky zdatnější studenti a vliv odlišného mateřského jazyka se na úspěšnosti řešení jednotlivých příkladů projevoval minimálně.

Závěr

Výše uvedené příklady lze využít při opakování před testem ke kapitole „reálná čísla **R** – odmocniny a pravidla pro počítání s odmocninami“. S ohledem na skutečnost, že tato oblast matematiky je více o počítání než o terminologii, nezpůsobuje zde nižší úroveň znalosti českého jazyky u studentů s OMJ žádné větší komplikace. Většina studentů 1. ročníku výpočet příkladů s odmocninami přesto příliš nezvládá, především pak v případě třetích a vyšších odmocnin.

Klíčová slova, slovník

odmocnina – корінь [k**o**r’iň]
druhá odmocnina – квадратний корінь / корінь другого степеня [kvadr**a**tnyj k**o**r’iň / k**o**r’iň dr**u**hoho st**e**peňa]
třetí odmocnina – кубічний корінь / корінь третього степеня [kub**i**čnyj k**o**r’iň / k**o**r’iň tr**e**ťoho st**e**peňa]
n-tá odmocnina – корінь n-го степеня [k**o**riň **e**nnoho st**e**peňa]
součin odmocnin – добуток коренів [dob**u**tok k**o**reňiv]
odmocňování odmocniny – добування кореня з кореня [dobuv**a**ňňa k**o**reňa z k**o**reňa]
odmocnina zlomku – добування кореня з дробу [dobuv**a**ňňa k**o**reňa z dr**o**bu]
umocňování odmocniny – піднесення кореня до степеня [pidn**e**seňňa k**o**reňa do st**e**peňa]
částečné odmocňování – винесення множника з-під знака кореня [v**y**neseňňa mn**o**žnyka spid zn**a**ka k**o**reňa]

Téma 10: Reálná čísla „R“ – mocniny s racionálním exponentem

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
OP Praha – pól růstu ČR

PRA HA
PRA GUE
PRA GA
PRA G

Název projektu: Zlepšení inkluze při výuce zahradnictví
Registrační číslo projektu: CZ.07.4.68/0.0/0.0/16_037/0000291
KA01

Téma 10: Číselné obory – reálná čísla „R“, část 4: mocniny s racionálním („Q“) exponentem. (matematika, 1. ročník)

Cíl: naučit žáky s OMJ schopnosti orientovat se a vyjadřovat se v oblasti reálných čísel, konkrétně v oblasti počítání s mocninami s racionálním („Q“) exponentem.

Úvod

Mocniny s racionálním exponentem jsou mocniny, u kterých je exponent vyjádřen jako zlomek. Pomocí racionálního exponentu lze propojit mocniny a odmocniny a chápat je tak jako tutéž operaci. V definici mocniny s racionálním exponentem ($a^{\frac{m}{n}}$) je číslo m celé, a tedy exponent (zlomek $\frac{m}{n}$) může být i záporný. Postup úpravy výrazu je úplně stejný jako v případě kladného exponentu. Je potřeba si pouze uvědomit, že platí: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Tzn. pro mocniny s racionálním exponentem pak analogicky platí: $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$, resp. v zápisu pomocí odmocniny: $\sqrt[n]{a^{-m}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a^m}}$.

Dílčí oblasti:

1. Mocniny s racionálním exponentem
   - definice: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ (a - kladné reálné číslo, n – přirozené číslo, m – celé číslo)
   - terminologie: a – základ mocniny (mocněnec), $\frac{m}{n}$ – exponent (mocnitel)

2. Počítání s mocninami s rac. exponentem (a, b – kladná reálná čísla; m, n – rac. čísla)
   - součin mocnin se stejným základem ($a^m \cdot a^n = a^{m+n}$)
   - umocňování součinu ($(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$)
   - umocňování mocniny ($(a^m)^n = a^{m \cdot n}$)
   - umocňování podílu ($(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$)

Příklad 1 – studenti řeší individuálně

S využitím znalostí o počítání mocnin s racionálním exponentem řešte následující úkoly:

Úkoly/otázky

1. Zapište následující výrazy jako odmocninu:

   a) $2{,}5^{0{,}3}$ b) $1{,}96^{-\frac{1}{2}}$ c) $(\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}$ d) $(\frac{9}{10})^{-\frac{3}{11}}$ e) $2^{-\frac{5}{4}}$

2. Zapište následující výrazy jako mocniny s kladným exponentem:

   a) $\sqrt[3]{5^{-2}}$ b) $\sqrt[5]{\frac{1}{3^{-4}}}$ c) $\sqrt[3]{\sqrt{6}}$ d) $\frac{5}{\sqrt[5]{5}}$ e) $4(\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}$

3. S využitím pravidel pro počítání s mocninami vypočítejte následující úlohy a výsledky zapište jako odmocninu:

   a) $(2^{\frac{2}{3}} \cdot 5^{\frac{4}{3}})^{\frac{9}{2}} =$ b) $(7^{-1})^{-3} \cdot 7^{-\frac{3}{2}} \cdot 7^{\frac{1}{2}} =$ c) $\frac{(3 \cdot 3^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{1}{4}}} =$

4. Odmocniny vyjádřete jako mocniny s racionálním exponentem a úlohy vypočítejte:

   a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[6]{3} \cdot \sqrt[12]{3^5} =$ c) $\sqrt[3]{4\sqrt{4}} \cdot \sqrt[3]{9\sqrt{9}} =$

   b) $\frac{\sqrt{7} \cdot \sqrt[3]{2^4} \cdot \sqrt[6]{7^5}}{14} =$ d) $\frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt[3]{3^4}}{\sqrt[4]{12^3}} =$

Řešení, výsledky

1.

a) $2{,}5^{0{,}3} = \boldsymbol{\sqrt[10]{2,5^3}}$ b) $1{,}96^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1{,}96}} = \frac{1}{1{,}4} = \boldsymbol{\frac{5}{7}}$ c) $(\sqrt{2})^{\frac{1}{3}} = (2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{6}} = \boldsymbol{\sqrt[6]{2}}$

d) $(\frac{9}{10})^{-\frac{3}{11}} = (\frac{10}{9})^{\frac{3}{11}} = \sqrt[11]{(\frac{10}{9})^3} = \boldsymbol{\sqrt[11]{\frac{10^3}{9^3}}}$ e) $2^{-\frac{5}{4}} = (\frac{1}{2})^{\frac{4}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{2^4}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt[5]{2}}{2}}$

2.

a) $\sqrt[3]{5^{-2}} = \boldsymbol{\frac{1}{5^{\frac{2}{3}}}}$ b) $\sqrt[5]{\frac{1}{3^{-4}}} = \sqrt[5]{3^4} = \boldsymbol{3^{\frac{4}{5}}}$ c) $\sqrt[3]{\sqrt{6}} = \sqrt[3]{6^{\frac{1}{2}}} = \boldsymbol{6^{\frac{1}{6}}}$

d) $\frac{5}{\sqrt[5]{5}} = 5^{1-\frac{1}{5}} = \boldsymbol{5^{\frac{4}{5}}}$ e) $4(\sqrt{2})^{\frac{1}{3}} = 4 \cdot 2^{\frac{1}{6}} = 2^{2+\frac{1}{6}} = \boldsymbol{2^{\frac{13}{6}}}$

3.

a) $(2^{\frac{2}{3}} \cdot 5^{\frac{4}{3}})^{\frac{9}{2}} = \boldsymbol{2^3 \cdot 5^6}$ b) $(7^{-1})^{-3} \cdot 7^{-\frac{3}{2}} \cdot 7^{\frac{1}{2}} = 7^{3-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}} = \boldsymbol{7^2}$

c) $\frac{(3 \cdot 3^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{1}{4}}} = 3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{6}} \cdot 3^{-\frac{1}{4}} = 3^{\frac{4+2-3}{12}} = \boldsymbol{3^{\frac{1}{4}}}$

4.

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[6]{3} \cdot \sqrt[12]{3^5} = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{6}} \cdot 3^{\frac{5}{12}} = \boldsymbol{3^{\frac{4}{3}}}$

b) $\frac{\sqrt{7} \cdot \sqrt[3]{2^4} \cdot \sqrt[6]{7^5}}{14} = 7^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{4}{3}} \cdot 7^{\frac{5}{6}} \cdot 2^{-1} \cdot 7^{-1} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot 7^{\frac{1}{3}} = \boldsymbol{14^{\frac{1}{3}}}$

c) $\sqrt[3]{4\sqrt{4}} \cdot \sqrt[3]{9\sqrt{9}} = \sqrt[3]{2^2 \cdot 2} \cdot \sqrt[3]{3^2 \cdot 3} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{3^3} = 2 \cdot 3 = \boldsymbol{6}$

d) $\frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt[3]{3^4}}{\sqrt[4]{12^3}} = 6^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{4}{3}} \cdot 12^{-\frac{3}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{4}{3}} \cdot 3^{-\frac{3}{4}} \cdot 2^{-\frac{3}{4} \cdot 2} = 2^{-1} \cdot 3^{\frac{1}{2}+\frac{4}{3}-\frac{3}{4}} = \boldsymbol{\frac{3}{2} \cdot \sqrt[12]{3}}$

Příklad 2 – studenti řeší ve dvojicích

Učitel zadává postupně celé třídě následujících 5 příkladů s tím, že studenti vytvoří dvojice, ve kterých můžou vzájemně spolupracovat. Po výpočtu každého příkladu napíše na tabuli první tři dvojice, které daný příklad spočítaly správně a přiřadí jim dle pořadí 3, 2 a 1 bod. Po výpočtu posledního příkladu provede učitel součet bodů získaných jednotlivými dvojicemi a nejlepší 3 dvojice ohodnotí „velkou“, „střední“ a „malou“ jedničku.

Příklady

1. $\frac{\sqrt{2^5} \cdot \sqrt[5]{2}}{2^{\frac{9}{10}} \cdot \frac{1}{2}} =$

2. $\frac{(2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{-\frac{3}{2}})^{\frac{3}{4}}}{(2^{\frac{3}{4}} \cdot 3^{-\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}}} =$

3. $(\frac{1}{9})^{-\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[4]{27} \cdot \frac{81^{-4}}{3^2} \cdot \sqrt[12]{3^{-5}} \cdot (\frac{1}{3})^{-2} =$

4. $(\frac{1}{6})^{-\frac{3}{2}} \cdot \sqrt[3]{54} \cdot (\frac{1}{2})^{-2} \cdot (\frac{1}{3})^{-\frac{1}{2}} =$

Výsledky

1. $\frac{\sqrt{2^5} \cdot \sqrt[5]{2}}{2^{\frac{9}{10}} \cdot \frac{1}{2}} = \mathbf{4 \cdot \sqrt[5]{2^4}}$

2. $\frac{(2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{-\frac{3}{2}})^{\frac{3}{4}}}{(2^{\frac{3}{4}} \cdot 3^{-\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}}} = 3^{-\frac{3}{8}} = \frac{3^{\frac{5}{8}}}{3} = \mathbf{\frac{\sqrt[8]{3^5}}{3}}$

3. $(\frac{1}{9})^{-\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[4]{27} \cdot \frac{81^{-4}}{3^2} \cdot \sqrt[12]{3^{-5}} \cdot (\frac{1}{3})^{-2} = \mathbf{\frac{1}{3^{15}}}$

4. $(\frac{1}{6})^{-\frac{3}{2}} \cdot \sqrt[3]{54} \cdot (\frac{1}{2})^{-2} \cdot (\frac{1}{3})^{-\frac{1}{2}} = \mathbf{2^3 \cdot 3^3 \cdot \sqrt[6]{2^5}}$

..

Reakce studentů (zpětná vazba)

příklad 1 i příklad 2

Oblast počítání mocnin s racionálním exponentem způsobuje problémy jak studentům s českým mateřským jazykem, tak i studentům s mateřským jazykem odlišným. Jinými slovy, oblast počítání mocnin s racionálním exponentem není ani tak o mateřském jazyku, jako spíše o tom, jakým způsobem mají studenti zvládnuté učivo z předchozích kapitol. Jako „příliš obtížnou“ označila tuto oblast matematiky většina studentů (českých i těch s OMJ) i v Dotaznících na „Zpětnou vazbu“. Je otázkou, jak tito studenti budou zvládat učivo matematiky ve vyšších ročnících a jak reálnou mají šanci úspěšně zvládnou maturitní zkoušku z matematiky.

Závěr

Výše uvedené příklady lze využít při opakování před testem ke kapitole „reálná čísla **R** – mocniny s racionálním exponentem“. S ohledem na skutečnost, že tato oblast matematiky je více o počítání než o terminologii, nezpůsobuje zde nižší úroveň znalosti českého jazyka u studentů s OMJ žádné větší komplikace. Většina studentů 1. ročníku výpočet příkladů s mocninami s racionálním exponentem přesto příliš nezvládá.

Klíčová slova, slovník

mocniny s racionálním exponentem – степені з раціональним показником [st**e**peňi z rac'ion**a**ľnym pok**a**znykom]

Příloha č. 1 – dotazník

Dotazník „Zpětná vazba“

1. Jednotlivé úkoly u příkladů řešených „individuálně“ považuji za:
    - ○ velmi snadné
    - ○ snadné
    - ○ odpovídající
    - ○ obtížné
    - ○ velmi obtížné

    Vlastní komentář (co přidat, co ubrat, co vypustit, co změnit apod.):

    ………………………………………………………………………………………

    ………………………………………………………………………………………

    ………………………………………………………………………………………

2. Jednotlivé úkoly u příkladů řešených „ve skupině“ považuji za:
    - ○ velmi snadné
    - ○ snadné
    - ○ odpovídající
    - ○ obtížné
    - ○ velmi obtížné

    Vlastní komentář:

    ………………………………………………………………………………………

    ………………………………………………………………………………………

    ………………………………………………………………………………………

3. Zvolenou formu a „téma“ u skupinově řešených příkladů považuji za:

   ○ nudnou

   ○ zábavnou

   ○ nevhodnou

   ○ poutavou

   Vlastní komentář:

   ……………………………………………………………………………………………

   ……………………………………………………………………………………………

   ……………………………………………………………………………………………

4. Osobní přínos příslušné části (tématu) matematiky:

   ○ dozvěděl/a jsem se něco nového

   ○ nedozvěděl/a jsem se nic nového

   ○ naučil/a jsem se něco nového

   ○ nenaučil/a jsem se nic nového

   Vlastní komentář:

   ……………………………………………………………………………………………

   ……………………………………………………………………………………………

   ……………………………………………………………………………………………

Příloha č. 2 – fotodokumentace

Obr. 1: třída 1.A, hodina MAT, leden 2018 (ing. Jiřina Hermová – facilitátor)

Obr. 2: třída 2.A, hodina MAT, únor 2018 (ing. Jiřina Hermová – facilitátor)

Obr. 3: třída 1.U, hodina MAT, leden 2018

Obr. 4: třída 3.A, hodina MAT, únor 2018

Obr. 5: třída 1.A, hodina MAT, říjen 2018

Obr. 6: třída 1.A, hodina MAT, říjen 2018

Obr. 7: třída 2.A, hodina MAT, prosinec 2018

Obr. 8: třída 2.A, hodina MAT, prosinec 2018